

Úvodní kurz matematických metod fyziky

pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

24.–25. 9. 2020

Maticový počet

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Počítání se sloupečky, řádky a maticemi

Objekty složené z čísel

sloupec

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

řádek

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]$$

matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix}$$

Počítání se sloupečky, řádky a maticemi

Objekty složené z čísel

sloupec

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

řádek

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]$$

matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix}$$

Sčítání a násobení číslem

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a^1 + b^1 \\ \vdots \\ a^n + b^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1^1 + B_1^1 & \cdots & A_n^1 + B_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n + B_1^n & \cdots & A_n^n + B_n^n \end{bmatrix} \quad r\boldsymbol{\alpha} = [r\alpha_1 \ \cdots \ r\alpha_n] \quad r\mathbf{A} = \begin{bmatrix} rA_1^1 & \cdots & rA_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ rA_1^n & \cdots & rA_n^n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_n a^n$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_n a^n$$

Násobení sloupečku maticí

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 a^1 + A_2^1 a^2 + \cdots + A_n^1 a^n \\ A_1^2 a^1 + A_2^2 a^2 + \cdots + A_n^2 a^n \\ \vdots \\ A_1^n a^1 + A_2^n a^2 + \cdots + A_n^n a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_n a^n$$

Násobení sloupečku maticí

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 a^1 + A_2^1 a^2 + \cdots + A_n^1 a^n \\ A_1^2 a^1 + A_2^2 a^2 + \cdots + A_n^2 a^n \\ \vdots \\ A_1^n a^1 + A_2^n a^2 + \cdots + A_n^n a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a matice

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} = [\alpha_1 A_1^1 + \cdots + \alpha_n A_1^n \quad \alpha_1 A_2^1 + \cdots + \alpha_n A_2^n \quad \cdots \quad \alpha_1 A_n^1 + \cdots + \alpha_n A_n^n] \\ = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n]$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_n a^n$$

Násobení sloupečku maticí

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 a^1 + A_2^1 a^2 + \cdots + A_n^1 a^n \\ A_1^2 a^1 + A_2^2 a^2 + \cdots + A_n^2 a^n \\ \vdots \\ A_1^n a^1 + A_2^n a^2 + \cdots + A_n^n a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a matice

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} = [\alpha_1 A_1^1 + \cdots + \alpha_n A_1^n \quad \alpha_1 A_2^1 + \cdots + \alpha_n A_2^n \quad \cdots \quad \alpha_1 A_n^1 + \cdots + \alpha_n A_n^n] \\ = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n]$$

Násobení matic

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & \cdots & B_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1^n & B_2^n & \cdots & B_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1^n & C_2^n & \cdots & C_n^n \end{bmatrix}$$

$\underbrace{A_1^1 B_2^1 + A_2^1 B_2^1 + \cdots + A_n^1 B_2^1}_{C_2^1}$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_n a^n \qquad r = \sum_{k=1}^n \alpha_k a^k$$

Násobení sloupečku maticí

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 a^1 + A_2^1 a^2 + \cdots + A_n^1 a^n \\ A_1^2 a^1 + A_2^2 a^2 + \cdots + A_n^2 a^n \\ \vdots \\ A_1^n a^1 + A_2^n a^2 + \cdots + A_n^n a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} \qquad b^i = \sum_{k=1}^n A_k^i a^k$$

Násobení řádku a matice

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} = [\alpha_1 A_1^1 + \cdots + \alpha_n A_1^n \quad \alpha_1 A_2^1 + \cdots + \alpha_n A_2^n \quad \cdots \quad \alpha_1 A_n^1 + \cdots + \alpha_n A_n^n] \\ = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n] \qquad \beta_j = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k^j$$

Násobení matic

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & \cdots & B_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1^n & B_2^n & \cdots & B_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1^n & C_2^n & \cdots & C_n^n \end{bmatrix} \qquad C_j^i = \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k$$

Použití matic v geometrii

Použití matic v geometrii

Vektory a jejich souřadnice

\vec{a} – vektor v třídímním prostoru

báze vektorů = lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Každý vektor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí sloupečku souřadnic:

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 + a^3 \vec{e}_3$$

vektor \vec{a} \leftrightarrow souřadnice $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$

Použití matic v geometrii

Vektory a jejich souřadnice

\vec{a} – vektor v třídímním prostoru

báze vektorů = lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Každý vektor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí sloupečku souřadnic:

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 + a^3 \vec{e}_3 \quad \text{vektor } \vec{a} \leftrightarrow \text{souřadnice } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Operátory a jejich souřadnice

M – lineární operátor transformuje vektor na vektor

$$\vec{a} \rightarrow \vec{b} = M \cdot \vec{a}$$

linearita: $M \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = M \cdot \vec{a} + M \cdot \vec{b}$
 $M \cdot (r\vec{a}) = r M \cdot \vec{a}$

Každý operátor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí matice souřadnic:

$$\vec{b} = M \cdot \vec{a} \leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} \quad \text{operátor } M \leftrightarrow \text{souřadnice } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1^1 & M_2^1 & M_3^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_3^2 \\ M_1^3 & M_2^3 & M_3^3 \end{bmatrix}$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = R_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos \varphi a^1 - \sin \varphi a^2$$

$$b^2 = \sin \varphi a^1 + \cos \varphi a^2$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = R_\varphi \cdot \vec{a}$$

V řeči matic:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_\varphi \cdot \mathbf{a} \quad \text{kde} \quad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos \varphi a^1 - \sin \varphi a^2$$

$$b^2 = \sin \varphi a^1 + \cos \varphi a^2$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = R_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos \varphi a^1 - \sin \varphi a^2$$

$$b^2 = \sin \varphi a^1 + \cos \varphi a^2$$

V řeči matic:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_\varphi \cdot \mathbf{a} \quad \text{kde} \quad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Skládání rotací:

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\alpha+\beta}$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = R_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos \varphi a^1 - \sin \varphi a^2$$

$$b^2 = \sin \varphi a^1 + \cos \varphi a^2$$

V řeči matic:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_\varphi \cdot \mathbf{a} \quad \text{kde} \quad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Rotace v prostoru

Rotace kolem kartézských os $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\mathbf{R}_\varphi^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\varphi^2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\varphi^3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí maticového násobení můžeme dostat souřadnice rotace \mathbf{R} dané složením rotací podél různých os, např. $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha^1 \cdot \mathbf{R}_\beta^3$.

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = R_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos \varphi a^1 - \sin \varphi a^2$$

$$b^2 = \sin \varphi a^1 + \cos \varphi a^2$$

V řeči matic:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_\varphi \cdot \mathbf{a} \quad \text{kde} \quad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Rotace v prostoru

Rotace kolem kartézských os $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\mathbf{R}_\varphi^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\varphi^2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\varphi^3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí maticového násobení může

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha^1 \cdot \mathbf{R}_\beta^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = R_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos \varphi a^1 - \sin \varphi a^2$$

$$b^2 = \sin \varphi a^1 + \cos \varphi a^2$$

V řeči matic:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_\varphi \cdot \mathbf{a} \quad \text{kde} \quad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Rotace v prostoru

Rotace kolem kartézských os $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\mathbf{R}_\varphi^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\varphi^2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\varphi^3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí maticového násobení můžeme dostat souřadnice rotace \mathbf{R} dané složením rotací podél různých os, např. $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha^1 \cdot \mathbf{R}_\beta^3$.

Maticová algebra

Matice umíme sčítat a násobit a výsledkem je opět matice. Matice tak zobecňují pojem obyčejných čísel, tvoří tzv. *algebru*. Platí pro ně základní vlastnosti sčítání a násobení.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

komutativita sčítání

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

asociativita sčítání

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

asociativita násobení

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

distributivita

$$\mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$$

nulová matice

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

jednotková matice

Maticová algebra

Matice umíme sčítat a násobit a výsledkem je opět matice. Matice tak zobecňují pojem obyčejných čísel, tvoří tzv. *algebru*. Platí pro ně základní vlastnosti sčítání a násobení.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

komutativita sčítání

asociativita sčítání

asociativita násobení

distributivita

nulová matice

jednotková matice

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Maticová algebra

Matice umíme sčítat a násobit a výsledkem je opět matice. Matice tak zobecňují pojem obyčejných čísel, tvoří tzv. *algebru*. Platí pro ně základní vlastnosti sčítání a násobení.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

komutativita sčítání

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

asociativita sčítání

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

asociativita násobení

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

distributivita

$$\mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$$

nulová matice

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

jednotková matice

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Oproti obyčejným číslům je ale násobení obecně nekomutativní:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

pro obecné \mathbf{A} a \mathbf{B}

Míru nekomutativnosti vyjadřuje komutátor

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Inverzní matice

Inverzní matice \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} je matice splňující

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Inverzní matice

Inverzní matice \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} je matice splňující

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Inverze umožňuje řešit systém n lineárních rovnic o n neznámých zapsaný v maticovém tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}$$

Inverzní matice

Inverzní matice \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} je matice splňující

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Inverze umožňuje řešit systém n lineárních rovnic o n neznámých zapsaný v maticovém tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}$$

Pro diagonální matice je inverze jednoduchá:

$$\begin{bmatrix} a_{(1)} & & & 0 \\ & a_{(2)} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{(n)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{(1)}^{-1} & & & 0 \\ & a_{(2)}^{-1} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{(n)}^{-1} \end{bmatrix}$$

Inverzní matice

Inverzní matice \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} je matice splňující

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Inverze umožňuje řešit systém n lineárních rovnic o n neznámých zapsaný v maticovém tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}$$

Pro diagonální matice je inverze jednoduchá:

$$\begin{bmatrix} a_{(1)} & & & 0 \\ & a_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{(1)}^{-1} & & & 0 \\ & a_{(2)}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n)}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ne každá matice má inverzi. Např. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ nebo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ nebo inverzi nemají. Takové matice se nazývají *singulární*.

Matice, které mají inverzi, se nazývají *regulární*.

Determinant

$$n = 1 \quad \det [a] = a \quad + [\circ]$$

$$n = 2 \quad \det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = ab - cd \quad + [\circ \circ] - [\circ \circ]$$

$$n = 3 \quad \det \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{array}{l} +A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 \\ -A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3 \end{array} \quad + [\circ \circ \circ] + [\circ \circ \circ] + [\circ \circ \circ] - [\circ \circ \circ] - [\circ \circ \circ] - [\circ \circ \circ]$$

$$n \quad \det \mathbf{A} = \sum_{\text{permutace } \sigma} \text{sign } \sigma A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$$

Determinant

$$\begin{aligned}
 n = 1 & \quad \det [a] = a & + [\circ] \\
 n = 2 & \quad \det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = ab - cd & + [\circ \circ] - [\circ \circ] \\
 n = 3 & \quad \det \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{aligned} & +A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 \\ & -A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3 \end{aligned} & + [\circ \circ \circ] + [\circ \circ \circ] + [\circ \circ \circ] - [\circ \circ \circ] - [\circ \circ \circ] - [\circ \circ \circ] \\
 n & \quad \det \mathbf{A} = \sum_{\text{permutace } \sigma} \text{sign } \sigma A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n
 \end{aligned}$$

Vlastnosti

- \mathbf{D} diagonální $\Rightarrow \det \mathbf{D} =$ součin čísel na diagonále
- pokud je alespoň jeden sloupec či řádek matice \mathbf{A} nulový $\Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$
- prohození dvou řádků (sloupců) změní pouze znaménko determinantu
- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1} \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$
- \mathbf{A} lze invertovat (je regulární) pokud $\det \mathbf{A} \neq 0$

Stopa

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_j A_j^j = \text{součet čísel na diagonále matice}$$

Cykličnost stopy

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \dots \cdot \mathbf{Z}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B} \cdot \dots \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A})$$

Stopa

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_j A_j^j = \text{součet čísel na diagonále matice}$$

Cykličnost stopy

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \dots \cdot \mathbf{Z}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B} \cdot \dots \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A})$$

Podobnost matic

Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} nazýváme podobné, pokud existuje regulární matice \mathbf{T} taková, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Determinanty a stopy podobných matic jsou stejné

$$\det(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}) = \det A$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}) = \operatorname{tr} A$$