

# Úvodní kurz matematických metod fyziky

pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

24.–25. 9. 2020

## Přehledové materiály

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

# Diferenciální počet

## Definice derivace

Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  derivaci rovnou konečné hodnotě  $f'(x_0)$  pokud pro dostatečně malá  $\varepsilon$  platí

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} + \text{chyba řádu } \varepsilon$$

Pokud lze derivaci  $f'(x_0)$  určit pro všechny hodnoty  $x_0$ , dostáváme novou funkci  $f'(x)$  nazývanou derivace funkce  $f(x)$ .

Používáme též značení

$$f' \equiv \frac{df}{dx}$$

## Lineární aproximace funkce pomocí derivace

Funkce  $f(x)$  lze v okolí hodnoty  $x_0$  aproximovat lineární závislostí plynoucí z definice derivace

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0) \varepsilon + \text{chyba řádu } \varepsilon^2$$

Alternativně tuto aproximaci můžeme zapsat

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{df}{dx}(x) dx + \text{chyba řádu } dx^2$$

## Pravidla pro derivace

$$\mathcal{D}_I \quad (h + g)' = h' + g'$$

$$\mathcal{D}_{II} \quad (af)' = af'$$

$$\mathcal{D}_{III} \quad (gh)' = g'h + gh'$$

$$\mathcal{D}_{IV} \quad \left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$$

$$\mathcal{D}_V \quad f'(x) = g'(h(x)) h'(x) \quad \text{kde } f(x) = g(h(x))$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad \text{kde } z(x) = z(y(x))$$

$$\mathcal{D}_{VI} \quad (f^{\text{inv}})'(x) = \frac{1}{f'(f^{\text{inv}}(x))}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{kde } x(y) \text{ je inverzní k } y(x)$$

$$\mathcal{D}_0 \quad \text{konst}' = 0$$

$$\mathcal{D}_1 \quad (x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\mathcal{D}_2 \quad \begin{array}{ll} \sin' x = \cos x & \cos' x = -\sin x \\ \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} & \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{array}$$

$$\mathcal{D}_3 \quad \exp' x = \exp x \quad (a^x)' = (\log a) a^x$$

$$\mathcal{D}_4 \quad \log' x = \frac{1}{x} \quad \log'_a x = \frac{1}{x \log a}$$

$$\mathcal{D}_5 \quad \begin{array}{ll} \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} & \text{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

$$\mathcal{D}_6 \quad \begin{array}{ll} \text{sh}' x = \text{ch } x & \text{ch}' x = \text{sh } x \\ \text{th}' x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} & \text{cth}' x = -\frac{1}{\text{sh}^2 x} \end{array}$$

$$\mathcal{D}_7 \quad \begin{array}{ll} \text{arsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{arcch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \text{arth}' x = \frac{1}{1-x^2} & \text{arceth}' x = \frac{1}{1-x^2} \end{array}$$

# Integrální počet

## Definice integrálu

Integrál reprezentuje “spojitou” sumu – součet velmi mnoha velmi malých hodnot.

Integrál funkce  $f(x)$  na intervalu  $x \in \langle a, b \rangle$  je

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N f(x_i) dx + \text{chyba řádu } dx$$

kde interval  $\langle a, b \rangle$  je rozdělen na dostatečně velký počet  $N$  malých intervalů délky  $dx = \frac{b-a}{N}$

a  $x_i$  jsou zvolené hodnoty v těchto intervalech (např. koncové body intervalů  $x_i = a + i dx$ ).

## Newtonův vzorec

Integrovaní je “inverzní” operace k derivování

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

často používáme zkrácené označení  $[F]_a^b = F(b) - F(a)$ .



## Primitivní funkce a neurčitý integrál

Primitivní funkce  $F$  k funkci  $f$  nazýváme “invertovanou” derivaci, tj. funkci splňující

$$F' = f$$

Primitivní funkci označujeme též pomocí neurčitého integrálu (integrálu bez mezí)

$$F = \int f \, dx$$

Newtonův vzorec nám dává vztah integrálu na intervalu a primitivní funkce

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a)$$

Primitivní funkce je určena až na konstantu, tj.  $F$  a  $F + \text{konst.}$  jsou primitivní funkce téže funkce  $f$ .

## Pravidla pro integrály

$$\mathcal{I}_0 \quad \int f' dx = [f] \quad \text{Newtonův vzorec}$$

$$\mathcal{I}_I \quad \int (g + h) dx = \int g dx + \int h dx$$

$$\mathcal{I}_{II} \quad \int a f dx = a \int f dx$$

$$\mathcal{I}_{III} \quad \int g' h dx = [g h] - \int g h' dx$$

$$\mathcal{I}_{IV} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi} d\xi$$

$$\int_a^\beta h(x(\xi)) d\xi = \int_a^b h(x) \frac{d\xi}{dx} dx$$

substituce  $x = x(\xi)$  s inverzí  $\xi = \xi(x)$

meze  $a = x(\alpha)$ ,  $b = x(\beta)$

$$\mathcal{I}_1 \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\mathcal{I}_2 \quad \int \sin x dx = -\cos x \quad \int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x dx = -\log(\cos x) \quad \int \cot x dx = \log(\sin x)$$

$$\mathcal{I}_3 \quad \int \exp x dx = \exp x \quad \int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x$$

$$\mathcal{I}_4 \quad \int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \int \log x dx = -x + x \log x$$

$$\mathcal{I}_5 \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccot} x$$

$$\mathcal{I}_6 \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \log(\operatorname{ch} x) \quad \int \operatorname{cth} x dx = \log(\operatorname{sh} x)$$

$$\mathcal{I}_7 \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsch} x \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcch} x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arcth} x \quad \int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arccth} x$$

# Maticový počet

## Počítání se sloupečky, řádky a maticemi

### Objekty složené z čísel

sloupec

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

řádek

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]$$

matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix}$$

### Sčítání a násobení číslem

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a^1 + b^1 \\ \vdots \\ a^n + b^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1^1 + B_1^1 & \cdots & A_n^1 + B_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n + B_1^n & \cdots & A_n^n + B_n^n \end{bmatrix}$$

$$r\boldsymbol{\alpha} = [r\alpha_1 \ \cdots \ r\alpha_n]$$

$$r\mathbf{A} = \begin{bmatrix} rA_1^1 & \cdots & rA_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ rA_1^n & \cdots & rA_n^n \end{bmatrix}$$

## Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1 a^1 + \alpha_2 a^2 + \cdots + \alpha_n a^n$$

$$r = \sum_{k=1}^n \alpha_k a^k$$

## Násobení sloupečku maticí

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 a^1 + A_2^1 a^2 + \cdots + A_n^1 a^n \\ A_1^2 a^1 + A_2^2 a^2 + \cdots + A_n^2 a^n \\ \vdots \\ A_1^n a^1 + A_2^n a^2 + \cdots + A_n^n a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

$$b^i = \sum_{k=1}^n A_k^i a^k$$

## Násobení řádku a matice

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \cdot \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} = [\alpha_1 A_1^1 + \cdots + \alpha_n A_1^n \quad \alpha_1 A_2^1 + \cdots + \alpha_n A_2^n \quad \cdots \quad \alpha_1 A_n^1 + \cdots + \alpha_n A_n^n] \\ = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n]$$

$$\beta_j = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k^j$$

## Násobení matic

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & \cdots & B_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1^n & B_2^n & \cdots & B_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1^n & C_2^n & \cdots & C_n^n \end{bmatrix}$$

$\overbrace{A_1^1 B_2^1 + A_2^1 B_2^1 + \cdots + A_n^1 B_2^1}$

$$C_j^i = \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k$$

## Použití matic v geometrii

### Vektory a jejich souřadnice

$\vec{a}$  – vektor v třídídimenzionálním prostoru

*báze vektorů* = lineárně nezávislé vektory  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Každý vektor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí sloupečku souřadnic:

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 + a^3 \vec{e}_3 \quad \text{vektor } \vec{a} \leftrightarrow \text{souřadnice } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

### Operátory a jejich souřadnice

$M$  – lineární operátor transformuje vektor na vektor

$$\vec{a} \rightarrow \vec{b} = M \cdot \vec{a}$$

linearita:  $M \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = M \cdot \vec{a} + M \cdot \vec{b}$   
 $M \cdot (r\vec{a}) = r M \cdot \vec{a}$

Každý operátor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí matice souřadnic:

$$\vec{b} = M \cdot \vec{a} \leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a} \quad \text{operátor } M \leftrightarrow \text{souřadnice } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1^1 & M_2^1 & M_3^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_3^2 \\ M_1^3 & M_2^3 & M_3^3 \end{bmatrix}$$

## Operátor rotace

### Rotace v rovině

$R_\varphi$  provádí rotaci vektoru o úhel  $\varphi$

$$\vec{b} = R_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos \varphi a^1 - \sin \varphi a^2$$

$$b^2 = \sin \varphi a^1 + \cos \varphi a^2$$

V řeči matic:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_\varphi \cdot \mathbf{a} \quad \text{kde} \quad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

### Rotace v prostoru

Rotace kolem kartézských os  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

$$\mathbf{R}_\varphi^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\varphi^2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\varphi^3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí maticového násobení můžeme dostat souřadnice rotace  $\mathbf{R}$  dané složením rotací podél různých os, např.  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha^1 \cdot \mathbf{R}_\beta^3$ .

## Maticová algebra

Matice umíme sčítat a násobit a výsledkem je opět matice. Matice tak zobecňují pojem obyčejných čísel, tvoří tzv. *algebru*. Platí pro ně základní vlastnosti sčítání a násobení.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

komutativita sčítání

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

asociativita sčítání

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

asociativita násobení

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

distributivita

$$\mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$$

nulová matice

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$$

jednotková matice

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Oproti obyčejným číslům je ale násobení obecně nekomutativní:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

pro obecné  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$

Míru nekomutativnosti vyjadřuje komutátor

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$



## Inverzní matice

Inverzní matice  $\mathbf{A}^{-1}$  k matici  $\mathbf{A}$  je matice splňující

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Inverze umožňuje řešit systém  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých zapsaný v maticovém tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}$$

Pro diagonální matice je inverze jednoduchá:

$$\begin{bmatrix} a_{(1)} & & & 0 \\ & a_{(2)} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{(n)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{(1)}^{-1} & & & 0 \\ & a_{(2)}^{-1} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & a_{(n)}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ne každá matice má inverzi. Např.  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  nebo  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  nebo inverzi nemají. Takové matice se nazývají *singulární*.

Matice, které mají inverzi, se nazývají *regulární*.

## Determinant

$$n = 1 \quad \det [ a ] = a \quad + [ \circ ]$$

$$n = 2 \quad \det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = ab - cd \quad + [ \circ \circ ] - [ \circ \circ ]$$

$$n = 3 \quad \det \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} +A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 \\ -A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3 \end{matrix} \quad + [ \circ \circ \circ ] + [ \circ \circ \circ ] + [ \circ \circ \circ ] - [ \circ \circ \circ ] - [ \circ \circ \circ ] - [ \circ \circ \circ ]$$

$$n \quad \det \mathbf{A} = \sum_{\text{permutace } \sigma} \text{sign } \sigma A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$$

## Vlastnosti

- $\mathbf{D}$  diagonální  $\Rightarrow \det \mathbf{D} =$  součin čísel na diagonále
- pokud je alespoň jeden sloupec či řádek matice  $\mathbf{A}$  nulový  $\Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$
- prohození dvou řádků (sloupců) změní pouze znaménko determinantu
- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1} \quad \Leftarrow \quad \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$
- $\mathbf{A}$  lze invertovat (je regulární) pokud  $\det \mathbf{A} \neq 0$

## Stopa

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_j A_j^j = \text{součet čísel na diagonále matice}$$

Cykličnost stopy

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \dots \cdot \mathbf{Z}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B} \cdot \dots \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A})$$

## Podobnost matic

Matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  nazýváme podobné, pokud existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  taková, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

Determinanty a stopy podobných matic jsou stejné

$$\det(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}) = \det A$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}) = \operatorname{tr} A$$

# Geometrie

## Skalární součin

$$\vec{a}, \vec{b} \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

symetrie

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) \quad (r\vec{a}, \vec{b}) = r(\vec{a}, \vec{b})$$

linearita

$$(\vec{a}, \vec{a}) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0}$$

pozitivní definitnost

$$\forall \vec{x} \quad (\vec{a}, \vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

nedegenerovanost

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$$

délka vektoru

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$$

úhel mezi vektory

## Vektorový součin

$$\vec{a}, \vec{b} \rightarrow \vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{v} \perp \vec{a} \quad \vec{v} \perp \vec{b} \quad |\vec{v}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$$

definiční vlastnosti

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

antisymetrie

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (r\vec{a}) \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b})$$

linearita

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

není asociativní

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

“bac – cab”

## Smíšený součin

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

= orientovaný objem rovnoběžnostěnu napnutého na  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

## Souřadnice vektorů

každý vektor lze vyjádřit vůči bázi

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 + a^3 \vec{e}_3$$

báze vektorů = lineárně nezávislé vektory  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

vektor  $\vec{a} \leftrightarrow$  souřadnice  $\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$

ortonormální báze

$$|\vec{e}_j| = 1 \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad \text{pro } i \neq j$$

## Skalární součin v ortonormálních souřadnicích

$$(\vec{a}, \vec{b}) \equiv a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

## Vektorový součin v ortonormálních souřadnicích

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$v^1 = a^2 b^3 - a^3 b^2$$

$$v^2 = a^3 b^1 - a^1 b^3$$

$$v^3 = a^1 b^2 - a^2 b^1$$

## Smíšený součin ortonormálních souřadnicích

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a^1 b^2 c^3 + a^2 b^3 c^1 + a^3 b^1 c^2 - a^1 b^3 c^2 - a^3 b^2 c^1 - a^2 b^1 c^3 = \det \begin{bmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

## Souřadnice bodů

### Lineární souřadnice

vztažná soustava: počátek  $P$  a souřadnicové osy dané lineárně nezávislými směry  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$A = P + \vec{r} = P + x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3$$

$\vec{r}$  průvodič bodu  $A$   $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$  (lineární) souřadnice bodu  $A$

místo  $x^1, x^2, x^3$  často používáme označení  $x, y, z$

### Kartézské souřadnice

osy  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  tvoří ortonormální bázi (jsou na sebe kolmé a mají stejnou jednotku)

vzdálenost bodů v kartézských souřadnicích:

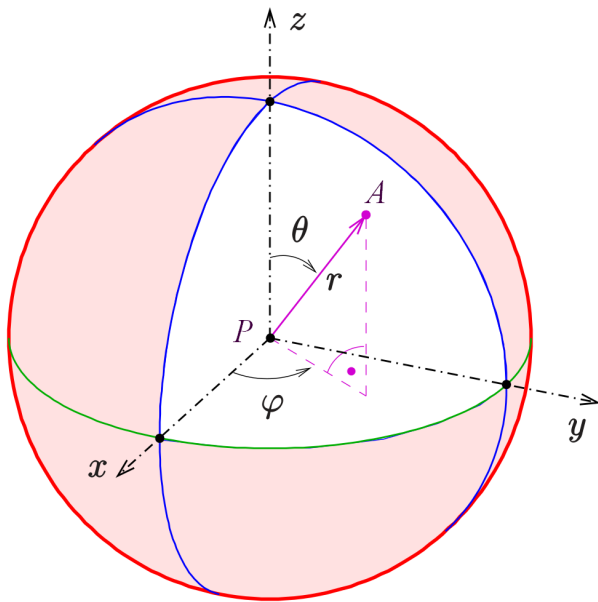
$$d(A, B) = |A - B| = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\text{kde } \Delta x^j = x^j(B) - x^j(A)$$

## Rovina $E^2$

Polární souřadnice  $\rho, \varphi$

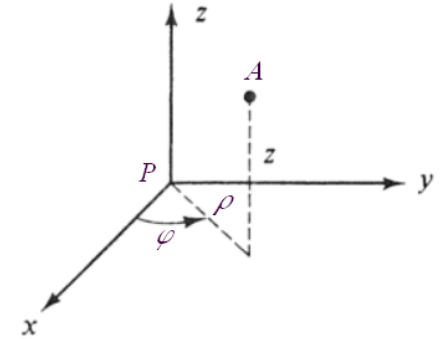
$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\y &= \rho \sin \varphi & \tan \varphi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$



## Prostor $E^3$

Cylindrické souřadnice  $\rho, \varphi, z$

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\y &= \rho \sin \varphi & \tan \varphi &= \frac{y}{x} \\z &= z & z &= z\end{aligned}$$



Sférické souřadnice  $r, \theta, \varphi$

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\y &= r \sin \theta \sin \varphi & \tan \theta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\rho}{z} \\z &= r \cos \theta & \tan \varphi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$



# Derivování v prostoru

## Funkce více proměnných

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

parciální derivace podle  $k$ -té proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_p) = \frac{d}{dx_k} f(\underbrace{x_1, \dots, x_{k-1}}_{\text{konstantní}}, x_k, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_p}_{\text{konstantní}})$$

symetrie druhých parciálních derivací

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}$$

derivování složené funkce

$$F(t) = f(h_1(t), h_2(t), \dots, h_p(t))$$

kde  $f(x_1, \dots, x_p)$  je funkce více proměnných a  $h_1(t), \dots, h_p(t)$  jsou funkce jedné proměnné

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(h_1, h_2, \dots, h_p) \frac{dh_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(h_1, h_2, \dots, h_p) \frac{dh_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(h_1, h_2, \dots, h_p) \frac{dh_p}{dt}$$