Úvodní kurz matematických metod fyziky

pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

Derivování v prostoru

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Funkce více proměnných

$$f\big(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_p\big)$$

parciální derivace podle k-té proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1,\, \ldots,\, x_k,\, \ldots,\, x_p\big) \quad = \quad \frac{d}{dx_k} f\big(\underbrace{x_1,\, \ldots,\, x_{k-1}}_{\text{konstantní}},\, x_k,\, \underbrace{x_{k+1},\, \ldots,\, x_p}_{\text{konstantní}}\big)$$

Funkce více proměnných

$$f\big(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_p\big)$$

parciální derivace podle k-té proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1,\, \ldots,\, x_k,\, \ldots,\, x_p\big) \quad = \quad \frac{d}{dx_k} f\big(\underbrace{x_1,\, \ldots,\, x_{k-1}}_{\text{konstantní}},\, x_k,\, \underbrace{x_{k+1},\, \ldots,\, x_p}_{\text{konstantní}}\big)$$

symetrie druhých parciálních derivací

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\, \partial x_l} \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\, \partial x_k}$$

Funkce více proměnných

$$f\big(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_p\big)$$

parciální derivace podle k-té proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1,\, \ldots,\, x_k,\, \ldots,\, x_p\big) \;=\; \frac{d}{dx_k} f\big(\underbrace{x_1,\, \ldots,\, x_{k-1}}_{\text{konstantní}},\, x_k,\, \underbrace{x_{k+1},\, \ldots,\, x_p}_{\text{konstantní}}\big)$$

symetrie druhých parciálních derivací

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\, \partial x_l} \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\, \partial x_k}$$

derivování složené funkce

$$F(t) = f\big(h_1(t),\, h_2(t),\, \ldots,\, h_p(t)\big)$$

kde $f\big(x_1,\, \ldots,\, x_p\big)$ je funkce více proměnných a $h_1(t),\, \ldots,\, h_p(t)$ jsou funkce jedné proměnné

$$\frac{dF}{dt} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_p\big)\,\frac{dh_1}{dt} \;+\; \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_p\big)\,\frac{dh_2}{dt} \;+\; \ldots \;+\; \frac{\partial f}{\partial x_p}\big(h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_p\big)\,\frac{dh_p}{dt}$$

Parametrizovaná křivka

$$A(\xi) \qquad\qquad A : \mathbb{R} \to \mathsf{E}^3$$

parametr:

geometrie – délka s pohyb – čas t obecný ξ

souřadnice křivky

$$\begin{aligned} x(\xi) &= x\big(A(\xi)\big) \\ y(\xi) &= y\big(A(\xi)\big) \\ z(\xi) &= z\big(A(\xi)\big) \end{aligned}$$

x, y, z kartézské souřadnice v prostoru

Parametrizovaná křivka

$$A(\xi) \qquad\qquad A \,:\, \mathbb{R} \to \mathsf{E}^3$$

parametr:

geometrie – délka s pohyb – čas t obecný ξ

souřadnice křivky

$$\begin{aligned} x(\xi) &= x\big(A(\xi)\big) \\ y(\xi) &= y\big(A(\xi)\big) \\ z(\xi) &= z\big(A(\xi)\big) \end{aligned}$$

x, y, z kartézské souřadnice v prostoru

příklady

přímka $A(\xi) = P + \xi\,\vec{a}$

$$\begin{aligned} x(\xi) &= x_\mathrm{o} + \xi\, a^x \\ y(\xi) &= y_\mathrm{o} + \xi\, a^y \\ z(\xi) &= z_\mathrm{o} + \xi\, a^z \end{aligned}$$

kružnice $A(\xi)$ v rovině

$$\begin{aligned} x(\xi) &= x_\mathrm{o} + \rho\cos\xi \\ y(\xi) &= y_\mathrm{o} + \rho\sin\xi \end{aligned}$$

Tečný vektor ke křivce

$$\vec{t} \;=\; \frac{d\vec{A}}{d\xi} \;=\; \frac{A(\xi + d\xi) - A(\xi)}{d\xi} + \text{chyba řádu } d\xi$$

vyjádření v souřadnicích

$$\vec{t} \;=\; \frac{d\vec{A}}{d\xi} \;=\; \frac{dx}{d\xi}\,\vec{e}_x + \frac{dy}{d\xi}\,\vec{e}_y + \frac{dz}{d\xi}\,\vec{e}_z$$

$$t^x = \frac{dx}{d\xi} \qquad t^y = \frac{dy}{d\xi} \qquad t^z = \frac{dz}{d\xi}$$

vyjádřeno v nehybné soustavě s počátkem P a osami $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, tj.

$$A(\xi) = P + x(\xi)\,\vec{e}_x + y(\xi)\,\vec{e}_y + z(\xi)\,\vec{e}_z$$

Tečný vektor ke křivce

$$\vec{t} \;=\; \frac{d\vec{A}}{d\xi} \;=\; \frac{A(\xi+d\xi)-A(\xi)}{d\xi} + \text{chyba řádu } d\xi$$

vyjádření v souřadnicích

$$\vec{t} \;=\; \frac{d\vec{A}}{d\xi} \;=\; \frac{dx}{d\xi}\,\vec{e}_x + \frac{dy}{d\xi}\,\vec{e}_y + \frac{dz}{d\xi}\,\vec{e}_z$$

$$t^x = \frac{dx}{d\xi} \qquad t^y = \frac{dy}{d\xi} \qquad t^z = \frac{dz}{d\xi}$$

vyjádřeno v nehybné soustavě s počátkem P a osami $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, tj.

$$A(\xi) = P + x(\xi)\,\vec{e}_x + y(\xi)\,\vec{e}_y + z(\xi)\,\vec{e}_z$$

rychlost

popis pohybu: křivka $A(t)$ parametrizována časem t
okamžitá rychlost je tečný vektor vzhledem k parametru t

$$\vec{v} = \frac{d\vec{A}}{dt} \qquad v^x = \frac{dx}{dt} \qquad v^y = \frac{dy}{dt} \qquad v^z = \frac{dz}{dt}$$

Aproximace křivky tečnou

$$A(\xi + d\xi) \;=\; A(\xi) + \vec{t}\, d\xi + \text{chyba řádu } d\xi^2$$

$$d\vec{A} \;=\; A(\xi + d\xi) - A(\xi) \;=\; \vec{t}\, d\xi + \text{chyba řádu } d\xi^2$$

$$\vec{t} \;=\; \frac{d\vec{A}}{d\xi}$$

Aproximace křivky tečnou

$$A(\xi + d\xi) = A(\xi) + \vec{t}\, d\xi + \text{chyba řádu } d\xi^2$$

$$d\vec{A} = A(\xi + d\xi) - A(\xi) = \vec{t}\, d\xi + \text{chyba řádu } d\xi^2$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{A}}{d\xi}$$

Délka křivky

$$s = \int_Z^K ds = \int_{\xi_Z}^{\xi_K} |\vec{t}|\, d\xi$$

$$ds = |d\vec{A}| = |\vec{t}\, d\xi| = |\vec{t}|\, d\xi$$

Gradient

$$\text{funkce } f(A) \qquad\qquad f \;:\; \mathsf{E}^3 \to \mathbb{R}$$

lze reprezentovat pomocí funkce $f(x, y, z)$ kartézských souřadnic x, y, z

$$f(A) \;=\; f\big(x(A), y(A), z(A)\big)$$

Gradient

$$\text{funkce } f(A) \qquad\qquad f \;:\; \mathsf{E}^3 \to \mathbb{R}$$

lze reprezentovat pomocí funkce $f(x, y, z)$ kartézských souřadnic x, y, z

$$f(A) \;=\; f\big(x(A), y(A), z(A)\big)$$

derivace funkce f podél křivky $A(\xi)$

$$\frac{df}{d\xi} \;=\; \frac{df\big(A(\xi)\big)}{d\xi} \;=\; \frac{df\big(x(\xi), y(\xi), z(\xi)\big)}{d\xi}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{df}{d\xi} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\xi} \qquad \Rightarrow$$

Gradient

$$\text{funkce } f(A) \qquad\qquad f \;:\; \mathsf{E}^3 \to \mathbb{R}$$

lze reprezentovat pomocí funkce $f(x,y,z)$ kartézských souřadnic x, y, z

$$f(A) \;=\; f\big(x(A),y(A),z(A)\big)$$

derivace funkce f podél křivky $A(\xi)$

$$\frac{df}{d\xi} \;=\; \frac{df\big(A(\xi)\big)}{d\xi} \;=\; \frac{df\big(x(\xi),y(\xi),z(\xi)\big)}{d\xi}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{df}{d\xi} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\xi}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\xi} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{df}{d\xi} \;=\; \big(\vec{\nabla} f\big)\cdot\vec{t}$$

gradient funkce

$$\vec{\nabla} f \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z \qquad\qquad \vec{t} \;=\; \frac{dx}{d\xi}\,\vec{e}_x+\frac{dy}{d\xi}\,\vec{e}_y+\frac{dz}{d\xi}\,\vec{e}_z$$

Gradient

$$\vec{\nabla} f \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

gradient funkce f – určuje směr a velikost změny funkce f v prostoru
kartézské složky gradientu jsou parciální derivace podél kartézských souřadnic

Gradient

$$\vec{\nabla} f \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

gradient funkce f – určuje směr a velikost změny funkce f v prostoru
kartézské složky gradientu jsou parciální derivace podél kartézských souřadnic

lineární aproximace funkce

$$f(A_\mathrm{o} + d\vec{A}) \quad = \quad f(A_\mathrm{o}) + d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} f(A_\mathrm{o}) + \ldots$$

Gradient

$$\vec{\nabla} f \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

gradient funkce f – určuje směr a velikost změny funkce f v prostoru
kartézské složky gradientu jsou parciální derivace podél kartézských souřadnic

lineární aproximace funkce

$$f(A_\mathrm{o} + d\vec{A}) \quad = \quad f(A_\mathrm{o}) + d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} f(A_\mathrm{o}) + \dots$$

vlastnosti gradientu

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(f+h) &= \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} h \\
\vec{\nabla}(fh) &= h\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} h \\
\vec{\nabla} F(h) &= F'(f)\,\vec{\nabla} h \\
\vec{\nabla} F(h_1, h_2, \dots) &= \frac{\partial F}{\partial h_1}\,\vec{\nabla} h_1 + \frac{\partial F}{\partial h_2}\,\vec{\nabla} h_2 + \dots
\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} x = \vec{e}_x \qquad \vec{\nabla} y = \vec{e}_y \qquad \vec{\nabla} z = \vec{e}_z$$

Newtonův vzorec

$$\int_Z^K \vec{\nabla} f \cdot \vec{ds} \quad = \quad f(K) - f(Z)$$

kde integrál probíhá podél libovolné křivky $A(\xi)$ běžící z bodu Z do bodu K

Newtonův vzorec

$$\int_Z^K \vec{\nabla} f \cdot \vec{ds} \;\; = \;\; f(K) - f(Z)$$

kde integrál probíhá podél libovolné křivky $A(\xi)$ běžící z bodu Z do bodu K

vskutku

$$\int_Z^K \vec{\nabla} f \cdot \vec{ds} \;\; = \;\; \int_{\xi_Z}^{\xi_K} \vec{\nabla} f \cdot \vec{t}\, d\xi \;\; = \;\; \int_{\xi_Z}^{\xi_K} \frac{df}{d\xi}\, d\xi \;\; = \;\; \left[\, f \,\right]_{\xi_Z}^{\xi_K} \;\; = \;\; f(K) - f(Z)$$