Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petr Černý

Tvar Kerrova gravitačního pole

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: *Doc., RNDr. Oldřich Semerák, Dr.*
Studijní program: *Fyzika, Teoretická fyzika*

Poděkování

V první řadě děkuji docentu Oldřichu Semerákovi – nejen za vedení během tvorby této práce, ale i za postoj, který zaujal k mému poněkud nestandardnímu přístupu ke studiu.

Největší díky patří mým rodičům za podporu a zázemí, které mi během studia poskytovali (a stále poskytují), doufajíce, že to bude k něčemu dobré. Snad je tato práce alespoň částečným potvrzením toho, že se úplně nemýlili.

Svému příteli Davidu Kubizňákovi jsem vděčen za četné rozhovory s fyzikální tématikou, které mne přiváděly zpět k fyzice ve chvílích, kdy se můj zájem o ni vytrácel.

Kolegům Radomíru Budínkovi, Pavlu Stránskému a Liboru Švédovi děkuji za nezištnou pomoc při studiu.

Poslední, leč ani zdaleka nejposlednější v mých myšlenkách, dík patří Evě.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 3.5.2005 Petr Černý

Obsah

Název práce: *Tvar Kerrova gravitačního pole*

Autor: *Petr Černý*

Katedra (ústav): *Ústav teoretické fyziky, MFF UK*

Vedoucí diplomové práce: *Doc., RNDr. Oldřich Semerák, Dr.*

e-mail vedoucího: *semerak@mbox.troja.mff.cuni.cz*

Abstrakt:

Kerrova metrika je přesné stacionární axiálně symetrické řešení Einsteinových rovnic, které popisuje gravitační pole kolem rotujícího objektu. Na otázku jaký tvar má toto pole není jednoznačná odpověď, poněvadž není jasné, co považovat za „siločáry“ a „ekvipotenciály“ pole. V newtonovském případě a ve Schwarzschildově prostoročasu nerotujícího zdroje jsou siločáry gravitačního pole integrálními křivkami zrychlení statických pozorovatelů a ekvipotenciály plochami konstantní velikosti tohoto zrychlení. V Kerrově rotujícím případě není kvůli obecně relativistickému efektu strhávání inerciálních systémů jasné, kterou kongruenci považovat za nejlepší zobecnění „stojícího“ („nerotujícího“) pozorovatele – takovýchto „přirozených“ zobecnění je více. V této práci zjišťujeme, jaký tvar gravitačních „ekvipotenciál“ vychází, pokud jako směrodatnou zvolíme některou z privilegovaných kongruencí třídy stacionárních pozorovatelů na kruhových orbitách, konkrétně (i) kongruenci pozorovatelů stojících „vůči nekonečnu“, (ii) kongruenci pozorovatelů s nulovým momentem hybnosti, (iii) kongruenci Carterových (kanonických) pozorovatelů a (iv) kongruenci pozorovatelů s extremální velikostí zrychlení. Pro každou z nich jsou numericky nalezeny plochy konstantní hodnoty zrychlení a poté porovnány některé souřadnicově závislé a některé invariantní charakteristiky těchto ploch. Získané výsledky ukazují, že nejpřirozeněji se v uvažovaném směru chová extremálně urychlená kongruence, zatímco Carterova kongruence se zdá být nejméně vhodná.

Klíčová slova: *obecná teorie relativity – gravitace*

Title: *Shape of the gravitational field of the Kerr spacetime*

Author: *Petr Černý*

Department: *Institute of Theoretical Physics, MFF UK*

Supervisor: *Doc., RNDr. Oldřich Semerák, Dr.*

Supervisor's e-mail address: *semerak@mbox.troja.mff.cuni.cz*

Abstract:

The Kerr metric is an exact stationary axially symmetric solution of the Einstein equations, which describes gravitational field around a rotating body. There is no simple answer to the question of shape of this field looks like as it is not clear what are "field lines" and "equipotentials". In the Newtonian case and in the Schwarzschild spacetime of a non-rotating source field lines are integral curves of the gravitational acceleration of static observers and equipotentials are surfaces of constant value of this acceleration. In the Kerr rotating case, due to the general relativistic effect of dragging of inertial frames, it is not clear which congruence is to be considered the best generalization of the "static" ("non-rotating") observer – there are more such "natural" generalizations. In this thesis we determine what is the shape of the gravitational "equipotentials" if we choose one of the privileged congruences of the class of stationary observers on circular orbits, namely (i) the observers at rest "with respect to infinity", (ii) the observers with null angular momentum, (iii) Carter's (canonical) observers and (iv) the observers with the extremal value of acceleration. For each of these congruences surfaces of constant value of acceleration are found numerically and some coordinate dependent as well as invariant characteristics of these surfaces are compared. It turns out that the extremally accelerated congruence behaves most natural in this sense whereas the Carter's congruence seems to be the least convenient.

Keywords: *general relativity – gravitation*

1. Úvod

1.1. Obecná teorie relativity

„Ptolemaios vymyslel vesmír a ten vydržel dva tisíce let, Newton vymyslel vesmír a ten vydržel dvě stě let. Doktor Einstein teď vymyslel nový vesmír a jak dlouho vydrží ten, to nikdo netuší.“ – G. B. Shaw, 1930.

Když Albert Einstein deset let po *speciální teorii relativity* zveřejnil svoji novou teorii gravitace, setkal se z počátku s ještě větším nepochopením, než o dekádu dříve. Jeho nová teorie byla koncepčně odlišná nejen od do té doby jediného, klasicky newtonovského chápání světa, ale odporovala i mnohem déle trvající vazbě fyziků (a filosofů) na euklidovskou geometrii.[1]

I přes počáteční pochybnosti však obecná teorie relativity vzdoruje pokusům o falzifikaci již téměř jedno století. Její elegance a prediktivní síla jsou tak přesvědčivé, že experiment prokazující její neplatnost by pravděpodobně převážná část odborníků zprvu označila přinejmenším za sporný, ne-li za zcela chybný (takový postřeh se objevil např. v diskusi o nákladném projektu *Gravity Probe B*, který v současné době probíhá).

Einsteinovy rovnice (1915)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

jsou systémem nelineárních pariálních diferenciálních rovnic 2. řádu pro $g_{\mu\nu}$ ve 4-rozměrném souřadnicovém prostoru. $R_{\mu\nu}$ a $\mathcal{R}$ jsou Ricciho tenzor a skalární křivost zkonstruované ze symetrického metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$ a jeho derivací, Λ kosmologická konstanta a $T_{\mu\nu}$ značí tenzor energie a hybnosti polí na varietě popisované metrikou $g_{\mu\nu}$. Jde o selfkonzistentní gravitační zákon – hmotnost-energie zakřivuje prostor a čas, zakřivení prostoročasu naopak určuje, jak se v něm bude hmota pohybovat (pohybové rovnice – ať už jde o rovnici geode-

[1] O necelé století dříve odkládal Carl Friedrich Gauss publikaci svých prací o neeuklidovských geometriích právě kvůli obavám z reakce akademické veřejnosti; ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, který své práce zveřejnil, byl označen za blázna.

tiky nebo např. Eulerovy rovnice pro pohyb ideální tekutiny – obsahují kovariantní derivaci, jejímž prostřednictvím do rovnic vstupují derivace metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$).

Třebaže řešení takovéhoto systému není ani zdaleka jednoduché, první přesné řešení[2] objevil Karl Schwarzschild již měsíc poté, co Einstein svoji novou teorii zveřejnil. Šlo o sféricky symetrické statické vakuové řešení (tedy řešení homogenního systému rovnic) popisující mimo jiné i pole nenabité bodové hmotnosti. Toto řešení umožnilo první testy nové teorie: bylo použito při výpočtech stáčení perihelia Merkuru, rudého posuvu pozorovaného ve slunečním spektru a ohýbaní paprsků světla (známou expedici, která měla ověřit relativistickou předpověď během zatmění slunce, vedl roku 1919 sir Arthur Stanley Eddington[3]).

Přestože Schwarzschildovo řešení bylo zveřejněno téměř současně se samotnou teorií, teprve roku 1939 publikovali J. Robert Oppenheimer a Hartland Snyder článek [1] o úplném gravitačním kolapsu, který v podstatě předjímal existenci objektu, pro nějž o více než 20 let později John Archibald Wheeler navrhl označení *černá díra*.

V roce 1950 pak John Lighton Synge jako první detailněji prozkoumal oblast ležící pod Schwarzschildovým poloměrem [2], která byla v té době mnohými považována přinejmenším za nerelevantní.[4]

V letech 1916, respektive 1918 objevili nezávisle na sobě Hans Reissner a Gunnar Nordström sféricky symetrické elektricky nabité řešení, které se stalo jedním z prvních nevakuových prostoročasů obecné teorie relativity.

Ve třicátých letech 20. století byla nalezena přesná řešení dodnes používaná (nejen) v kosmologických modelech: (anti) de Sitterův a Friedmannův-(Lemaîtreův)-Robertsonův-Walkerův prostoročas.

Tato raná řešení postupně vytvořila živnou půdu pro otázky, z nichž některé nejsou uspokojivě zodpovězeny dodnes (např. existence nahých singularit či problém ztráty informace v černé díře).

[2]samozřejmě s výjimkou plochého Minkowského prostoročasu speciální relativity

[3]Dnes se ovšem zdá, že provedená měření nesvědčila ve prospěch nové teorie tak jasně, jak bylo tehdy prezentováno.

[4]Pod Schwarzshildovým poloměrem $r_G = \frac{2GM}{c^2}$ (na kterém leží horizont černé díry) je gravitace natolik silná, že částicím ani fotonům nedovolí uniknout do oblasti nad ním. Odtud také Wheelerem navržený název.

1.2. Pole rotujících objektů

Počáteční úspěchy při hledání přesných řešení byly však podmíněny jejich extrémní jednoduchostí – šlo vesměs o řešení s vysokým počtem symetrií nebo se speciální (často nulovou) pravou stranou. Dnes je běžně přijímaným faktem, že přesné řešení, které by popisovalo *realistické* hmotné rotující těleso včetně jeho vnitřku, se pravděpodobně v dohledné době (pokud vůbec) nalézt nepodaří. Jako modely se proto používají buď řešení perturbační, nebo řešení numerická. První jsou však většinou omezena rozsahem, ze kterého lze volit parametry, druhá skupina vybírá pouze jedno konkrétní řešení (numerické metody jsou nadto silně limitovány omezenou přesností a výkonem počítačů).

Roku 1963 publikoval Roy Patrick Kerr řešení [3] rovnic (1.1) popisující pole rotujícího hmotného objektu, které je dodnes vnímáno jako fenomenální. Kerrovo řešení je z hlediska relativistické astrofyziky podstatně zajímavější než řešení předcházející – o reálných objektech se totiž vzhledem k diferenciální povaze elektromagnetických sil předpokládá, že mají zanedbatelný náboj. Oproti tomu však (jak napovídají například pozorování pulzarů) mohou disponovat významným momentem hybnosti. Řešení se navíc objevilo v době, kdy se díky astronomickým objevům začalo o černých dírách uvažovat jako o reálně existujících objektech. Zaujalo však nejen jako první přesný popis rotujícího objektu, ale i samotnou svojí strukturou. Mimo jiné umožnilo zkoumat čistě relativistický efekt strhávání prostoročasu (dragging effect).

Kerrova dvouparametrická (hmotnost a rotační moment hybnosti) rodina řešení byla posléze rozšířena o další dva parametry: elektrický náboj a magnetický monopól (tento parametr se však běžně neuvažuje, protože magnetický monopól ještě „nikdo nikdy neviděl“).

Rovněž vznikly metriky, jejichž asymptotikou[5] není plochý Minkowského prostoročas, ale zakřivený (anti) de Sitterův. Ty nacházejí uplatnění např. při pokusech o vytvoření teorie supergravitace.

[5] chování metriky poblíž prostorového nekonečna

2. Kerrovo řešení

2.1. Metrika

2.1.1. Boyerovy-Lindquistovy souřadnice

Nejčastěji se Kerrovo-Newmannovo řešení charakterizované hmotností M a rotačním momentem hybnosti $J = Ma$ (a nábojem Q, který však s výjimkou níže uvedené metriky nebudeme dále uvažovat) uvádí v Boyerových-Lindquistových souřadnicích:

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta\Sigma}{\mathcal{A}}\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma}\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\phi - \omega\mathrm{d}t)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2 \ , \tag{2.1}$$

kde:[1]

$$\begin{aligned} \Delta = &\ r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \ , \quad & \mathcal{A} = &\ (r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta \ , \\ \Sigma = &\ r^2 + a^2\cos^2\theta \ , & \omega = &\ \frac{(2Mr - Q^2)a}{\mathcal{A}} \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

V tomto tvaru jsou jasně zohledněny symetrie řešení. Snadno nahlédneme, že existují dva Killingovy vektory $\eta_\mu = \partial x^\mu/\partial t$ a $\xi_\mu = \partial x^\mu/\partial\phi$, svázané s metrikou vztahy:

$$g_{tt} = \eta_\mu\eta^\mu \ , \quad g_{\phi\phi} = \xi_\mu\xi^\mu \quad \text{a} \quad g_{t\phi} = \eta_\mu\xi^\mu \ . \tag{2.3}$$

Patrná je rovněž reflexní symetrie vůči rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$. Skutečnost, že současná záměna libovolné dvojice z $[t, \phi, a]$ za opačné hodnoty ponechává metriku nezměněnu, je pak významnou indicií, že metrika může popisovat rotující objekt, jehož rotace je (nějak) parametrizována hodnotou a (ω – jediná metrická funkce lineární v a – je zodpovědná za strhávání prostoročasu „rotací singularity“).

Metrika (2.1), (2.2) přechází pro $a = 0$ v Riessnerovu-Nordströmovu metriku (která se při $Q = 0$ dále redukuje na Schwarzschildovo řešení). Z důvodů uvedených v kapitole 1 budeme nadále předpokládat $Q = 0$.

[1] alternativně (např. [4]) se používá tvaru:
$\mathrm{d}s^2 = -(\Delta/\rho^2)[\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi]^2 + (\sin^2\theta/\rho^2)[(r^2+a^2)\mathrm{d}\phi - a\mathrm{d}t]^2 + (\rho^2/\Delta)\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2$,
kde $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ a Δ je definována stejně jako pro tvar uvedený v textu.

Metrika je v BL souřadnicích singulární v $[r = 0\,, \theta = \pi/2]$ a pokud je $|a| \leq M$, pak také pro

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}\ . \tag{2.4}$$

První případ je fyzikální singularita – diverguje zde např. Kretschmannův invariant $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Směrovost této singularity naznačuje, že je spojená i s určitou vlastností souřadnic (konkrétně s tím, že r nelze přímočaře interpretovat jako *sférickou* radiální souřadnici – viz níže). Tato singularita je na rozdíl od Schwarzschildova řešení časupodobná[2].

Druhý případ je souřadnicového charakteru. Je obdobou schwarzschildovského poloměru $r_G = 2M$ (na který se pro $a = 0$ také redukuje), nacházejí se zde horizonty černé díry, tedy nulové nadplochy s vlastnostmi polopropustných membrán (časupodobná případně světelná geodetika jimi může procházet pouze v jednom směru), které oddělují dvě části prostoročasu. O existenci horizontů svědčí například velikost Killingova bivektoru

$$K^2 = -2\eta_{[\mu}\xi_{\nu]}\eta^{[\mu}\xi^{\nu]} \overset{(2.3)}{=} -(g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2)\ , \tag{2.5}$$

která v těchto místech vymizí. Na rozdíl od Schwarzschildovy metriky mohou však v obecném případě být horizonty dva (podobně jako u Reissnerova-Nordströmova řešení). Při zvětšování $|a|$ z $a = 0$ se původní schwarzschildovský horizont zmenšuje a z počátku souřadnic se vynoří druhý, který se k vnějšímu přibližuje, až při $a = M$ (extrémní Kerrova černá díra) oba horizonty splynou. Pro $|a| > M$ se horizonty nevytvoří a řešení obsahuje nahou singularitu.

V oblasti mezi horizonty je metrika dynamická. Nejenže asymptoticky časupodobný Killingův vektor η^μ je zde prostorupodobný, ale nelze zde ani (lineární kombinací s ξ^μ) zkonstruovat jakýkoliv jiný časupodobný Killingův vektor – roli časové souřadnice hraje r, na kterém ovšem metrika závisí.

Boyerovy-Lindquistovy souřadnice jsou vhodné pro popis a zkoumání vnější části černoděrového řešení. Plně tak postačují pro astrofyzikální aplikace. Jejich výhodou je, že jsou přizpůsobeny symetriím řešení: pro $r \to \infty$ přecházejí ve sférické souřadnice, horizont je v nich přesně sférický (třebaže jeho „skutečná“ geometrie je poněkud odlišná). Zajímáme-li se ovšem o vnitřek černé díry nebo vlastnosti nahé singularity, je vhodnější sáhnout po jiném souřadném systému.

[2]Mohla by tedy v jisté oblasti prostoročasu způsobovat problémy s řešením Cauchyho úlohy. Zároveň je však také citlivá na perturbace, takže se již při malém porušení Kerrova řešení stává prostorupodobnou.

2.1.2. Kerrovy-Schildovy souřadnice

Kerr původně hledal řešení rovnic ve tvaru $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2Hk_\mu k_\nu$, kde k_μ je nulový 4-vektor a H skalární pole, takže nalezenou metriku zapsal v (dnes) Kerrových souřadnicích, které jsou zobecněním souřadnic Eddingtonových-Finkelsteinových (světelných). Transformací pak přešel k (dnes) Kerrovým-Schildovým souřadnicím (podrobně v [3]):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tilde{t}^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2}\left[\frac{r(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) - a(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)}{r^2 + a^2} + \frac{z\mathrm{d}z}{r} + \mathrm{d}\tilde{t}\right] , \end{aligned} \tag{2.6}$$

kde r je definováno implicitně:

$$r^4 - (R^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0 \,, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \,. \tag{2.7}$$

Tyto souřadnice přecházejí v limitě $M, a \to 0$ na Minkowského souřadnice plochého prostoročasu, především však podstatně lépe popisují blízké okolí singularity. r, které je zde funkcí prostorových souřadnic, je totiž Boyerova-Lindquistova radiální souřadnice. Přepíšeme-li vztah (2.7) do vhodnějšího tvaru

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \,,$$

vidíme, že plochy $\{r = konst\}$ popisují konfokální rotační elipsoidy, které pro $r = 0$ degenerují na disk $\{z = 0, x^2 + y^2 \le a^2\}$. Na jeho hranici diverguje Kretschmannův invariant, vnitřkem disku lze ale r analyticky prodloužit do záporných hodnot, pro které skaláry zkonstruované z Riemannova tenzoru ani metrika nedivergují. Singularita má tedy tvar prstence $\{x^2 + y^2 = a^2, z = 0\}$.

Prodloužení r lze využít pro získání *maximálního analytického rozšíření* řešení. To je (podrobněji např. v [5]) zkonstruováno tak, že se prostory $(\tilde{t}, x, y, z)_+$ a $(\tilde{t}, x, y, z)_-$, v nichž r nabývá nezáporných, resp. nekladných hodnot, identifikují v oblastech odpovídajících vnitřku zmíněného disku (ohraničeného singularitou). Varieta získaná analytickým rozšířením navíc obsahuje oblasti, ve kterých je možné vytvořit uzavřené časupodobné křivky a porušit tak kauzalitu (jde o toroidální oblast $\{\mathcal{A} < 0\}$, kde je $g_{\phi\phi} < 0$ a $\partial/\partial\phi$ se tak stává časupodobným vektorem, viz [6]).

2.1.3. Weylovy-Lewisovy-Papapetrouovy souřadnice

Každý stacionární axiálně symetrický prostoročas lze v tzv. Weylových-Lewisových-Papapetrouových souřadnicích cylindrického typu popsat metrikou

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\nu}\mathrm{d}t^2 + \rho^2 B^2 e^{-2\nu}(\mathrm{d}\phi - \omega\mathrm{d}t)^2 + e^{2\lambda-2\nu}(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2)\ , \tag{2.8}$$

kde ν, B, ω, λ závisejí pouze na souřadnicích ρ a z.

Při řešení Einsteinových rovnic stačí nalézt funkce ν, B a ω – zbývající λ z nich lze dopočítat integrací. V případě vakuového (a v některých případech i obecnějšího) problému se počet rovnic ještě o jednu sníží, lze totiž ukázat, že $B = 1$ je jediné řešení rovnic (1.1), které má patřičné asymptotické chování v nekonečnu (v případě izolovaného systému chceme, aby souřadnice přecházely na cylindrické).

Pro vakuové řešení jsou tyto souřadnice svázány s Boyerovými-Lindquistovými transformací:

$$\rho = \sqrt{\Delta}\sin\theta\ , \quad z = (r - M)\cos\theta\ . \tag{2.9}$$

Po dosazení získáme pro metrické funkce vztahy:

$$e^{2\nu} = \frac{\Delta\Sigma}{\mathcal{A}}\ , \quad e^{2\lambda} = \frac{\Delta\Sigma^2}{\mathcal{E}\mathcal{A}}\ , \tag{2.10}$$

kde $\mathcal{E} = (r - M)^2\sin^2\theta + \Delta\cos^2\theta$. Do těchto vztahů bychom správně měli dosadit invertovanou transformaci (2.9). Výsledné výrazy jsou však zbytečně komplikované a nebudeme je zde uvádět.

Určitou nevýhodou této metriky je například to, že černoděrová řešení jsou v ní popsána pouze vně horizontu[3], který tvoří úsečku na ose symetrie. O tom se lze snadno přesvědčit dosazením do (2.9): pro horizont r_+ je $\Delta = 0 \Rightarrow \rho = 0$ a $|z| \leq \sqrt{M^2 - a^2}$. Pro Schwarzschildovu černou díru je horizont úsečkou $z \in \langle -M, M\rangle$, která se při zvyšující se rotaci zkracuje, až je pro extrémní Kerrovu černou díru redukována na bod. Pro nahou singularitu jsou pak tyto souřadnice vysloveně nevhodné.

2.2. Stacionární kruhový pohyb

Přestože metrika $g_{\mu\nu}$ obsahuje kompletní informaci o gravitačním poli daného prosotoročasu, není tou veličinou, kterou chceme měřit. Našemu vnímání světa

[3] případně uvnitř či mezi horizonty v závislosti na tom, jaký rozsah r uvažujeme v transformaci (2.9)

daleko spíše přísluší otázka: „Jaká na mě bude působit síla?“ než: „Jaký je metrický koeficient v bodě...?“[4] Takovýto přístup rovněž umožňuje jednodušší srovnání s klasickou mechanikou (tedy v oblastech, kde je obecná teorie relativity její zanedbatelnou korekcí).

Chceme-li provádět nějaká měření, musíme především zvolit „laboratorní“ systém, v němž má experiment probíhat. Ačkoliv jsou z hlediska obecné teorie relativity všechny systémy ekvivalentní, ukazuje se, že některé speciální systémy jsou určitým způsobem preferované a jiné naopak vyloučené.

Zajímáme-li se přímo o „sílu“ gravitačního pole, je volba vhodného referenčního systému ještě důležitější – s přechodem do lokálního inerciálního systému totiž vymizí Christoffelovy symboly $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$, které (alespoň pro slabé pole) odpovídají klasické intenzitě gravitačního pole. Zároveň se v různých systémech různě projeví vliv inerciálních sil.

Gravitační pole budeme měřit pomocí velikosti zrychlení, kterému jsou podrobeni pozorovatelé na určitých předepsaných drahách. Tato veličina je sice závislá na volbě pozorovatele, na druhé straně velikost 4-zrychlení je skalární veličina, jejíž hodnota se při změně souřadnic nemění. Zároveň můžeme z různých charakteristik usoudit, kteří pozorovatelé jsou pro měření (ne)vhodnější a která jejich vlastnost je důležitá.

Pod pojmem „pozorovatel“ rozumíme *testovací* bodovou nenabitou částici[5] reprezentovanou 4-rychlostí u^{μ}. Té předepíšeme trajektorii, podle níž vypočteme zrychlení.[6]

Základní podmínkou pro volbu takovéto (a obecně i jakékoliv jiné) trajektorie je její časupodobnost:

$$u_{\mu}u^{\mu} = -1 \ , \tag{2.11}$$

která zaručuje fyzikální realizovatelnost hmotným pozorovatelem.

Při volbě trajektorií (nebo přesněji jejich kongruencí) se nabízí speciální třída tzv. stacionárních pozorovatelů, jejichž 4-rychlost u^{μ} (tedy tečný vektor trajektorie) je podél každé jednotlivé trajektorie Killingovým vektorem dané

[4] Odpověď na otázku, proč tomu tak je, není triviální, svoji roli ale jistě hraje i předchozí zkušenost s newtonovskou mechanikou.

[5] Pro klasickou částici s vlastním momentem hybnosti je zapotřebí řešit Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice, které zahrnují působení nehomogenit gravitačního pole na efektivně nebodovou částici. Pro různé fyzikálně ospravedlnitelné dodatečné podmínky však tyto rovnice mohou vést k odlišným pohybům – více např. v [7].

[6] Často se pod pojmem pozorovatel rozumí přímo pole u^{μ}, které popisuje celou kongruenci pozorovatelů.

metriky. Tito pozorovatelé vnímají geometrii ve svém blízkém okolí jako neměnnou a ve stacionárním prostoročasu mohou tedy někteří z nich být rozumným zobecněním newtonovského stojícího pozorovatele. Jak uvidíme níže, statický pozorovatel (tedy takový, který je „v klidu vůči nekonečnu“) totiž není vždy tím fyzikálně nejrealističtějším.

V Kerrově (a obecně v každém stacionárním axisimetrickém) prostoročasu tvoří trajektorie stacionárních pozorovatelů kružnice, které jsou rovnoběžné s ekvatoriální rovinou a mají střed na ose symetrie prostoročasu. Pro danou kružnici lze již pozorovatele jednoznačně charakterizovat jedním parametrem, totiž konstantní úhlovou rychlostí

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{2.12}$$

jeho pohybu. 4-rychlost lze pak zapsat ve tvaru[7]

$$u^\mu = u^t(\eta^\mu + \Omega\xi^\mu) = u^t(1, 0, 0, \Omega) \;, \tag{2.13}$$

kde u^t lze určit z normalizační podmínky (2.11)

$$(u^t)^{-2} = -(g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}) \;. \tag{2.14}$$

Stejná podmínka omezuje i rozsah povolených hodnot $\Omega \in (\Omega_{\min}, \Omega_{\max})$:

$$\Omega_{\min,\max} = \omega \mp \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \;, \tag{2.15}$$

(platí $\omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$).

Dosadíme-li do (2.15) metrické funkce, zjistíme, že časupodobné kruhové orbity nemohou existovat mezi horizonty $r_\pm$. To souhlasí s tím, že v této oblasti neexistuje časupodobný Killingův vektor a metrika je zde dynamická (časová souřadnice je r).

Pro zrychlení těchto pozorovatelů platí:

$$a_\mu = \frac{\mathrm{D}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} = u_{\mu;\nu}u^\nu = u_{\mu,\nu}u^\nu - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}u_\rho u^\nu \;.$$

První člen je ale identicky nulový, protože

$$u_{\mu,\nu}u^\nu = (g_{\mu\rho}u^\rho)_{,\nu}u^\nu = g_{\mu\rho,\nu}u^\rho u^\nu + g_{\mu\rho}u^\rho{}_{,\nu}u^\nu$$

[7]ať již v Boyerových-Lindquistových souřadnicích (t, r, θ, ϕ) nebo v levotočivé formě (t, ρ, z, ϕ) Weylových(-L-P) souřadnic (t, ρ, ϕ, z)

a podle (2.13) a (2.2) může být parciální derivace metriky a 4-rychlosti nenulová pouze pro $\nu = r, \theta$, kdy je ovšem právě příslušná složka 4-rychlosti u^ν nulová. Pro druhý člen pak máme

$$-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} u_\rho u^\nu = -\Gamma_{\rho\mu\nu} u^\rho u^\nu = -\frac{1}{2}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) u^\rho u^\nu \ .$$

První a třetí člen v závorce jsou dohromady antisymetrické v $\rho\nu$ a násobeny v týchž indexech symetrickým součinem $u^\rho u^\nu$ – zbyde tedy pouze prostřední člen a pro 4-zrychlení máme výsledek

$$a_\mu = -\frac{1}{2} g_{\rho\sigma,\mu} u^\rho u^\sigma \ . \tag{2.16}$$

Tento vztah je obecně platný pro pozorovatele, jehož 4-rychlost lze psát jako konstantní kombinaci Killingových vektorů. Pro případ Kerrova prostoročasu je zřejmé, že jediné nenulové složky a_μ mohou být r a θ.[8]

Uvažujeme-li kongruence pozorovatelů, zajímá nás průběh Ω v závislosti na prostorových souřadnicích (na nichž závisí metrika). V takovém případě považujeme u^μ a a^μ za pole, která můžeme podobně jako v hydrodynamice popisovat pomocí tenzorů expanze a vířivosti:

$$\Theta_{\mu\nu} = u_{(\mu;\nu)} + a_{(\mu} u_{\nu)} \quad \text{a} \quad \omega_{\mu\nu} = u_{[\mu;\nu]} + a_{[\mu} u_{\nu]} \ . \tag{2.17}$$

V této práci se budeme zabývat čtyřmi významnými kongruencemi. Podrobnější rozbor lze nalézt například v [8] a [9].

2.2.1. Statičtí pozorovatelé

jsou ti, kteří jsou v klidu vůči pozorovatelům stojícím v prostorovému nekonečnu, což v BL (i WLP) souřadnicích znamená $\Omega_{\mathrm{SO}} = 0$ [9]. Tito pozorovatelé jsou sice přímočarým zobecněním klasického (newtonovského) stojícího pozorovatele, ale vykazují různé „nepříjemné“ vlastnosti. Požadujeme-li platnost (2.11), která je v tomto případě rovnocenná požadavku časupodobnosti Killingova vektoru ξ^μ, dostáváme z (2.1) a (2.2), že statický pozorovatel může existovat pouze vně *statických mezí* [10]

$$r_{0,1} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta} \ . \tag{2.18}$$

[8] totéž platí i o a^μ, jelikož metrika je v těchto indexech diagonální
[9] index SO podle anglického Static Observer
[10] tedy $r > r_0$ nebo $r < r_1$

Ty existují i pro případ nahé singularity, kde jsou však propojeny do jedné toroidální oblasti (na rozdíl od černých děr, u nichž jsou jak horizonty, tak statické meze sféroidální).

Statické meze jsou tedy plochy, mezi nimiž je prostoročas singularitou strháván natolik, že fyzikální pozorovatelé jsou nuceni ke korotaci ($\Omega > 0$). Z oblasti mezi statickou mezí a horizontem, tzv. *ergosféry*, je v principu možné odčerpat rotační energii černé díry (podle druhého zákona termodynamiky černých děr se však během tohoto procesu nesmí zmenšit plocha horizontu).

2.2.2. ZAMO

Zero Angular Momentum Observers jsou definováni vztahem

$$\Omega_{\mathrm{ZAMO}} = \omega \ . \tag{2.19}$$

Jak je patrné z názvu, jsou to pozorovatelé s nulovým momentem hybnosti. Platí totiž

$$l = u_\phi = g_{\phi\alpha} u^\alpha = u^t g_{\phi\phi} \left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} + \Omega \right) = u^t g_{\phi\phi} (\Omega - \omega) \tag{2.20}$$

a s ohledem na (2.19) je tedy $l_{\mathrm{ZAMO}} = 0$.

Také volná testovací částice padající s $u_\phi = konst. = 0$ z klidu z prostorového nekonečna se bude v Kerrově prostoročasu pohybovat po $\theta = konst.$ a právě s $\Omega = \omega$ (a v lokálním systému ZAMO se tedy bude pohybovat radiálně).

Světelné signály vyslané těmito pozorovateli podél $r, \theta = konst.$ v opačných směrech[11] dorazí zpět za stejnou dobu (vodítkem může být např. vztah (2.15) – $\Omega_{\mathrm{min,max}}$ jsou totiž právě úhlové rychlosti fotonů). V tomto smyslu jsou tedy pro ZAMO směry $\pm\phi$ ekvivalentní. I proto se o nich často prohlašuje, že „rotují s geometrií".

Navíc má ZAMO kongruence nulový tenzor vířivosti – gyroskopy svázané s tímto pozorovatelem (diferenciálně) nerotují vůči gyroskopům pozorovatele na sousední trajektorii. Proto jsou souřadné systémy takto adaptované na ZAMO označovány jako LNRF (Locally Non-Rotating Frames).

[11] Obecně tyto signály samozřejmě nejsou geodetické (to by mohlo platit pouze v ekvatoriální rovině a kromě případu $a = 0$ nikdy pro oba směry současně) a je tedy zapotřebí uvažovat nějaký způsob urychlení signálů, např. pomocí zrcadel.

2.2.3. Carterovi pozorovatelé

Pro tyto pozorovatele platí[12]

$$\Omega = \Omega_{\mathrm{CO}} = \frac{a}{r^2 + a^2} \; . \tag{2.21}$$

Podobně jako ZAMO jsou svázáni s určitou významnou kongruencí v prostoročasu: jejich stacionární tetrády jsou symetrické vůči principiálním nulovým směrům Kerrova řešení.[13] Ty jsou v BL souřadnicích dány vztahy (v tomto tvaru[14] např. v [10]):

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right) \tag{2.22}$$

$$n^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{2\Sigma}, -\frac{\Delta}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Sigma} \right) \tag{2.23}$$

Vidíme, že se tyto fotony pohybují po $\theta = konst.$ a porovnáme-li t a ϕ složky, dostáváme pro ně (podle (2.13)) $\Omega_{\mathrm{PNC}} = \Omega_{\mathrm{CO}}$ – pro Carterova pozorovatele jsou čistě radiální, jde tedy o obdobu vztahu mezi hmotnou částicí s nulovým momentem hybnosti a ZAMO.

Navíc se vycházející fotony (2.22) na horizontech černé díry redukují na jejich generátory. Vzhledem k tomu, že horizonty (2.4) leží v BL souřadnicích na konstantních r, rotuje „povrch“ černé díry jako tuhé těleso – ω je na horizontu konstantní (to lze ostatně ověřit i přímým dosazením (2.4) do ω).

2.2.4. Extremálně urychlení pozorovatelé

Úhlová rychlost EAO[15] extremalizuje pro danou prostorovou dráhu (v našem případě kružnici na pevném (r, θ)) velikost 4-zrychlení

$$\kappa_1^2 = a_\mu a^\mu \; . \tag{2.24}$$

Jde tedy o pozorovatele, kteří na dané dráze pociťují největší (nebo nejmenší) zrychlení. Lze však ukázat, že toto není jejich jediná významná vlastnost.

[12] index CO je opět odvozen z anglického názvu

[13] Kerrovo řešení je typu D Petrovovy klasifikace, má tedy dva různé (degenerované) principiální nulové směry.

[14] vektory jsou v této podobě normalizovány $l^\mu n_\mu = -1$

[15] Třebaže tato zkratka (<u>E</u>xtremally <u>A</u>ccelerated <u>O</u>bserver(s)) vypadá na první pohled divně, je konzistentní se značením ZAMO, SO, CO.

Frenetova-Serretova tetráda

Podél každé *urychlené* trajektorie lze zavést souřadné systémy charakterizované speciální ortonormální tetrádou. Její vektory $e^{\mu}_{\hat{\alpha}}$ (α je tetrádový index nabývající hodnot 0...3) jsou určeny čistě geometrií prostoročasu a uvažované trajektorie tak, že splňují rovnice:

$$\begin{aligned} \dot{e}^{\mu}_{\hat{0}} &= \kappa_1 e^{\mu}_{\hat{1}} \ , & \dot{e}^{\mu}_{\hat{1}} &= \kappa_1 e^{\mu}_{\hat{0}} + \kappa_2 e^{\mu}_{\hat{2}} \ , \\ \dot{e}^{\mu}_{\hat{2}} &= -\kappa_2 e^{\mu}_{\hat{1}} + \kappa_3 e^{\mu}_{\hat{3}} \ , & \dot{e}^{\mu}_{\hat{3}} &= -\kappa_3 e^{\mu}_{\hat{2}} \ , \end{aligned} \tag{2.25}$$

kde tečka značí absolutní derivaci podél světočáry. $e^{\mu}_{\hat{\alpha}}$ bývají označovány jako tečna a první až třetí normála, koeficienty κ_i první až třetí křivost.[16] Tečný vektor je 4-rychlost, první normála je jednotkový vektor ve směru zrychlení, čili podle (2.24):

$$e^{\mu}_{\hat{0}} = u^{\mu} \ , \quad e^{\mu}_{\hat{1}} = \frac{a^{\mu}}{\kappa_1} \ . \tag{2.26}$$

Pro kruhové orbity ve stacionárním osově symetrickém prostoročase lze dále zapsat v poměrně jednoduchém tvaru i zbývající dva tetrádové vektory, které mají nenulové pouze složky (t, ϕ), resp. (ρ, z) [17].

Obecný vztah pro přenos vektoru podél časupodobné křivky má tvar

$$\dot{V}^{\mu} = (u^{\mu} a_{\nu} - a^{\mu} u_{\nu}) V^{\nu} - \epsilon^{\mu}{}_{\rho\sigma\nu} u^{\rho} \Omega^{\sigma} V^{\nu} \quad , \tag{2.27}$$

kde Ω^{σ} je vektor úhlové rychlosti rotace V^{μ} vůči vektorům, které jsou přenášeny podél stejné trajektorie Fermiho-Walkerovým přenosem (tedy pouze pomocí první závorky). Srovnáním s (2.25) dostáváme pro rotaci vektoru a^{μ} během pohybu po trajektorii:

$$\epsilon^{\mu}{}_{\rho\sigma\nu} u^{\rho} \Omega^{\sigma} a^{\nu} = -\kappa_1 \kappa_2 e^{\mu}_{\hat{2}} \quad . \tag{2.28}$$

Pro κ_2 ale podle [9] (podrobnější diskuzi včetně např. explicitního vyjádření $e^{\mu}_{\hat{2},\hat{3}}$ lze najít tamtéž) platí

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{1}{2K(u^t)^2} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \Omega} = \frac{1}{2K(u^t)^2} \frac{1}{\kappa_1} a^{\mu}_{\hat{1}} \frac{\partial a_{\mu}}{\partial \Omega} \\ &= \frac{1}{2K(u^t)^2} e^{\mu}_{\hat{1}} \frac{\partial a_{\mu}}{\partial \Omega} \quad . \end{aligned} \tag{2.29}$$

[16] Značení se může lišit, používá se např. (κ, τ_1, τ_2) křivost a první, resp. druhá torze.
[17] ve WLP souřadnicích, nebo (r, θ) složky v BL

Vidíme tedy, že extremálně urychlení pozorovatelé si při pohybu fermi-walkerovsky přenášejí své zrychlení. Jinými slovy, gyroskop natočený do směru, v němž tento pozorovatel pociťuje tíži (tedy ve směru zrychlení, jemuž je podroben), bude tímto směrem mířit i během celého dalšího pohybu. Zároveň je jejich trajektorie významná i z čistě geometrického hlediska – má nulovou druhou křivost κ_2 (třetí křivost je obecně nenulová, vymizí pouze v ekvatoriální rovině).

Obě tyto vlastnosti – největší (případně nejmenší) zrychlení ze všech pozorovatelů na dané dráze a směr „tíže" pevný vůči gyroskopům – jsou důvodem, proč je možné považovat EAO za vhodné zobecnění newtonovských stojících pozorovatelů. Pro jejich úhlovou rychlost tedy požadujeme

$$\left.\frac{\partial \kappa_1}{\partial \Omega}\right|_{\Omega_{\mathrm{EAO}}} = 0 \; . \tag{2.30}$$

V ekvatoriální rovině pro tyto pozorovatele navíc platí, že právě vůči nim mají pro- a retro-grádní *geodetičtí pozorovatelé* na stejném r stejné (samozřejmě až na znaménko) relativní rychlosti (podrobněji v [11]).

2.2.5. Geodetičtí pozorovatelé

Poslední významnou skupinou jsou pozorovatelé, jejichž trajektorie jsou geodetiky (platí $a^\mu = 0$). Podržíme-li požadavek stacionárního pohybu, je vzhledem ke tvaru zrychlení (2.16) a metriky (2.1), (2.2) výskyt těchto pozorovatelů omezen na ekvatoriální rovinu.[18]

Speciálním případem těchto pozorovatelů jsou světelné geodetiky. Ty ohraničují tzv. *rotosféry* – oblasti, ve kterých má (mimo jiné) 4-zrychlení neobvyklý průběh v závislosti na úhlové rychlosti Ω. Navíc tyto geodetiky ohraničují oblasti, v nichž existují extremálně urychlení pozorovatelé.

Geodetičtí pozorovatelé jsou pro účel měření intenzity gravitačního pole z definice nezpůsobilí a navíc je jasné, že ani ve schwarzschildovské nebo newtonovské limitě nepředstavují „stojící" pozorovatele. Jak ale uvidíme dále, jsou „opačným" případem extremálně urychených pozorovatelů a umožňují snadno rozeznat „pravé" EAO i mimo ekvatoriální rovinu.

[18] To ovšem neznamená, že mimo ekvatoriální rovinu neexistují uzavřené geodetiky – existují polární geodetiky a pro nahé singularity mohou tito pozorovatelé existovat navíc ještě na ose symetrie v bodech $r = \pm a$.

3. Gravitační pole Kerrova řešení

Gravitační pole Kerrova řešení budeme tedy studovat pomocí 4-zrychlení různých kongruencí stacionárních pozorovatelů. Zajímat se budeme pouze o část prostoročasu ležící nad (vnějším) horizontem černé díry, pro nahé singularity o oblast $r > 0$. Jednak je tato oblast (v případě černoděrového řešení) přímo přístupná fyzikálnímu měření a za druhé v ní (alespoň někteří) stacionární pozorovatelé existují všude.

Pro nahé singularity je volba odůvodněna například tím, že oblast $r = 0$ připouští dvojí interpretaci – buďto je možné r analyticky prodloužit do záporných hodnot (jak bylo zmíněno v oddílu 2.1.2), nebo na $r = 0$ uvažovat slupku hmoty (ukazuje se však, že rozložení hmoty odpovídající průběhu metriky přes $r = 0$ by bylo nefyzikální[1]).

Velikost 4-zrychlení je dána vztahem (2.24):

$$\kappa_1^2 = a^\mu a_\mu = g^{\rho\sigma} a_\rho a_\sigma = g^{rr}(a_r)^2 + g^{\theta\theta}(a_\theta)^2 \,.$$

Metrika je ale v souřadnicích r a θ diagonální a můžeme tedy psát

$$\kappa_1^2 = \frac{1}{g_{rr}}(a_r)^2 + \frac{1}{g_{\theta\theta}}(a_\theta)^2 \,. \tag{3.1}$$

Pro tuto veličinu budeme hledat plochy (nebo, vzhledem k rotační symetrii prostoročasu, křivky v rovině r–θ, jejichž rotací kolem osy symetrie vzniknou plochy), na nichž je konstantní. Ty představují ekvipotenciály gravitačního pole – samozřejmě ve smyslu tíže, kterou pociťují pozorovatelé dané kongruence.

3.1. Úhlové rychlosti různých pozorovatelů

Úhlové rychlosti prvních tří rodin pozorovatelů (tedy statických, ZAMO a Carterových) jsou dány jednoduchým analytickým vztahem a lze snadno ukázat,

[1]obsahovalo by záporné hustoty energie

že pokud $a \neq 0$, pak pro $r > r_+$ (a také pro $0 < r < r_-$) platí

$$\Omega_{\mathrm{SO}} \leq \Omega_{\mathrm{ZAMO}} \leq \Omega_{\mathrm{CO}} \,, \tag{3.2}$$

přičemž druhá nerovnost přechází pro $r = r_+$ v rovnost. Obě nerovnosti přecházejí v rovnosti, když $r \to \infty$. To je dáno rozsahem povolených úhlových rychlostí (2.15) a asymptotickým chováním

$$\Omega_{\mathrm{ZAMO}} = \omega = \frac{2Mra}{(r^2+a^2)^2 + (r^2 - 2Mr + a^2)a^2 \sin^2\theta} \,. \tag{3.3}$$

Jak jsme zmínili v oddíle 2.2.1, statičtí pozorovatelé neexistují obecně pro všechna uvažovaná r (a θ).

Ve statickém případě $a = 0$ (tedy ve Schwarzschildově prostoročasu) jsou tito pozorovatelé identičtí – přecházejí ve statické pozorovatele, kteří stojí v pevně daném bodě.

3.1.1. EAO

U extremálně urychlených pozorovatelů je situace komplikovanější. Jejich úhlová rychlost je dána kořeny rovnice (2.30) pro Ω. Nejprve rozepíšeme

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial \Omega} = \frac{1}{2\kappa_1}\frac{\partial \kappa_1^2}{\partial \Omega} = \frac{1}{2\kappa_1}\frac{\partial}{\partial \Omega}(g^{\mu\nu}a_\mu a_\nu) = \frac{1}{\kappa_1} g^{\mu\nu} a_\mu \frac{\partial a_\nu}{\partial \Omega} \,. \tag{3.4}$$

Kromě geodetického pohybu je však 4-zrychlení nenulové a diverguje pouze v limitě $\Omega \to \Omega_\pm$. Můžeme se tedy omezit na poslední tři činitele a posléze vyloučit případná geodetická řešení v ekvatoriální rovině (a samozřejmě řešení mimo povolený interval (2.15)). Jak bylo zmíněno v oddílu 2.2, zrychlení má nejvýše dvě nenulové složky, takže dostáváme (srovnej též s (3.1))

$$g^{\mu\nu} a_\mu \frac{\partial a_\nu}{\partial \Omega} = g^{rr} a_r \frac{\partial a_r}{\partial \Omega} + g^{\theta\theta} a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \Omega} = \frac{1}{g_{rr}} a_r \frac{\partial a_r}{\partial \Omega} + \frac{1}{g_{\theta\theta}} a_\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial \Omega} \,. \tag{3.5}$$

Následně dosadíme vztah pro 4-zrychlení

$$a_\mu = \frac{1}{2}\frac{g_{tt,\mu} + 2g_{t\phi,\mu}\Omega + g_{\theta\theta,\mu}\Omega^2}{g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\theta\theta}\Omega^2} \equiv \frac{\mathcal{P}_\mu(\Omega)}{\mathcal{Q}(\Omega)} \tag{3.6}$$

a dostáváme

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial \Omega} \sim \frac{1}{g_{rr}}\frac{2}{\mathcal{Q}^3}(\mathcal{P}_r {\mathcal{P}_r}' \mathcal{Q} - \mathcal{Q}' \mathcal{P}_r^2) + \frac{1}{g_{\theta\theta}}\frac{2}{\mathcal{Q}^3}(\mathcal{P}_\theta {\mathcal{P}_\theta}' \mathcal{Q} - \mathcal{Q}' \mathcal{P}_\theta^2) \,, \tag{3.7}$$

což v čitateli vypadá na polynom pátého stupně v Ω ($\mathcal{P}_{r,\theta}$ a $\mathcal{Q}$ jsou polynomy druhého stupně v Ω, $\mathcal{P}_{r,\theta}{}'$ a $\mathcal{Q}'$ jejich derivace podle Ω), analyticky neřešitelný ($\mathcal{Q}$ souvisí s velikostí 4-rychlosti (2.14), v povoleném rozsahu Ω je tedy nenulový). Lze ale ukázat, že každá ze závorek je sama o sobě pouze polynomem 4. stupně – koeficient u vedoucího členu Ω^5 je nulový:

$$\Omega^5 : p_{\mu 2} \cdot 2p_{\mu 2} \cdot q_2 - 2q_2 \cdot (p_{\mu 2})^2 = 0 \; , \tag{3.8}$$

$p_{\mu 2}$, resp. q_2 jsou koeficienty u vedoucích členů $\mathcal{P}_\mu$, resp. $\mathcal{Q}$.

Ω_{EAO} je tedy řešením polynomu 4. stupně v Ω, jehož koeficienty jsou dány metrikou (a jejími derivacemi) v daném bodě. V principu lze tedy pro výpočet úhlové rychlosti extremálně urychlených pozorovatelů použít analytický vztah.

Vzorec pro kořen rovnice 4. stupně je však poměrně komplikovaný. Navíc je do něj na místa koeficientů zkoumaného polynomu zapotřebí dosadit – v našem případě různé kombinace metrických funkcí. Ty jsou samy o sobě polynomy, častěji ale racionálními funkcemi v souřadnicích r a θ.

Z takto získané úhlové rychlosti ještě musíme spočítat 4-zrychlení (nejlépe dosazením do (3.6)) a poté jeho velikost (3.1), případně odmocninu z ní.

3.2. Průběhy úhlových rychlostí a zrychlení

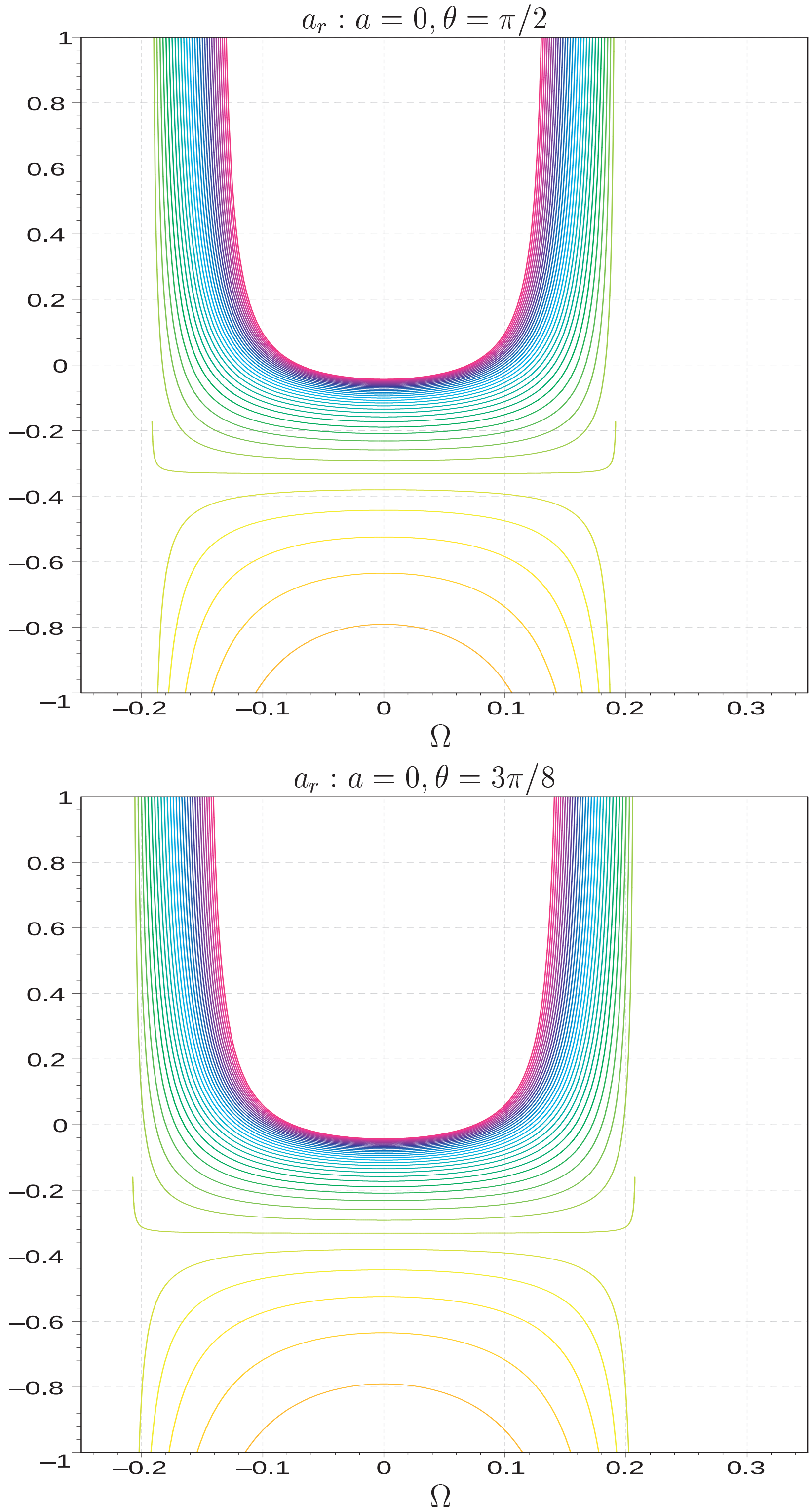
Už pro Schwarzshildovu černou díru vidíme, že zrychlení (obr. 3.1) vykazuje zajímavé vlastnosti. Pro $r = 3M$ je radiální složka zrychlení nezávislá na Ω,[2] v oblasti blíže k centru se při zvyšování úhlové rychlosti přitažlivá síla a_r centrální oblasti zvyšuje (na rozdíl od klasické situace, kde zrychlení oběhu zvýší odstředivou složku síly). Právě na $r_{\mathrm{ph}} = 3M$ ve Schwarzschildově prostoročasu leží fotonové orbity, oblast pod nimi je *rotosféra* (zmiňovaná na konci oddílu 2.2.4).

θ-složka zrychlení je v ekvatoriální rovině nulová[3], mimo ekvatoriální rovinu s rostoucí $|\Omega|$ roste. To odpovídá klasické představě – tíhové zrychlení na povrchu (ideálně sférické) Země nesměřuje přímo ke středu, ale je odstředivým zrychlením poněkud odchýleno směrem k rovině kolmé na osu rotace.

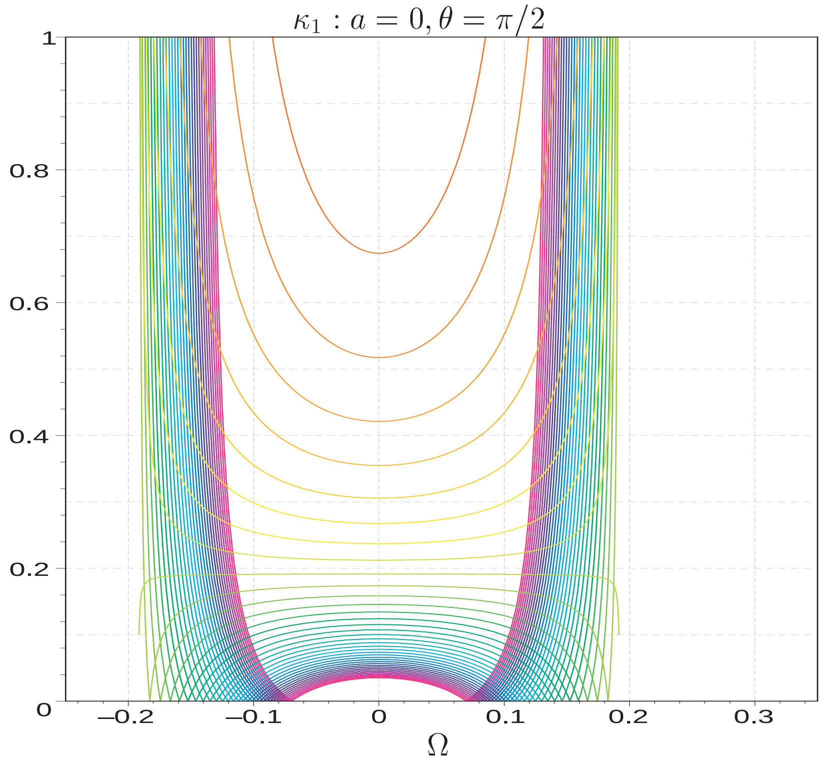
Podíváme-li se na průběh velikosti 4-zrychlení κ_1 (obr. 3.2), zjistíme, že mimo ekvatoriální rovinu mohou obecně existovat tři extremálně urychlení po-

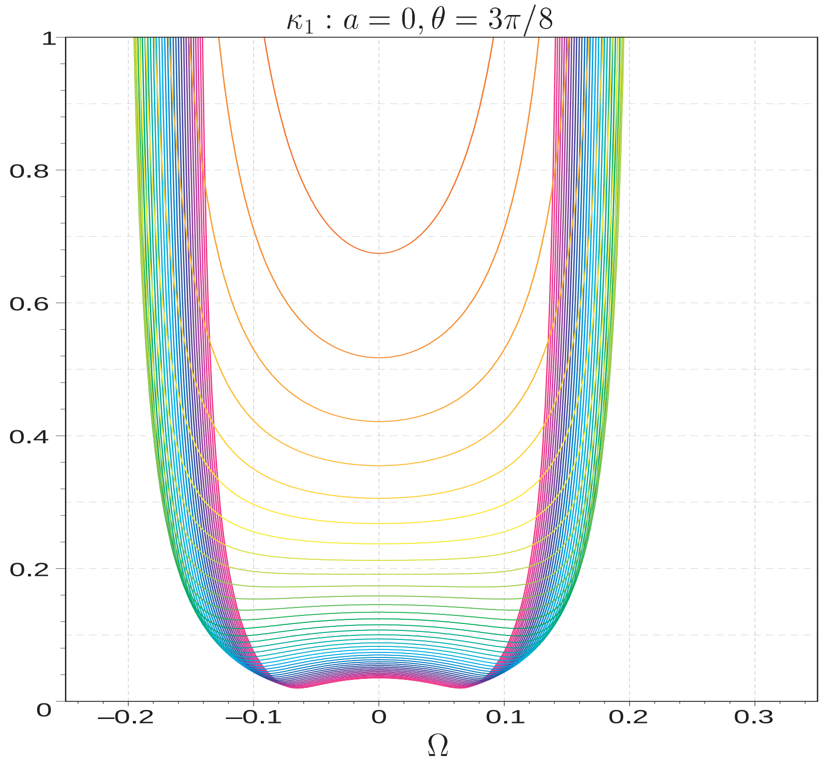
[2] Snadným výpočtem např. podle (3.6) se lze přesvědčit o tom, že $a_r|_{r=3M} = \frac{1}{3M}$ a $\kappa_1|_{r=3M} = \frac{1}{27M^2}$.

[3] plyne již ze symetrie, proto není uveden obrázek (a nebude uveden ani pro případy $a \neq 0$)



Obrázek 3.1.: $a_r(r, \Omega)$ pro $\theta = \pi/2, 3\pi/8$, Schwarzschildova černá díra
Křivky znázorňují průběh složek 4-zrychlení na daném θ pro různá r. Červená barva značí $r = r_+ + 0.005M$ a s krokem $0.1M$ prochází spektrum k fialové pro $r = 6M$. Jelikož g_{rr} je nad r_+ kladná, části křivek ležící pod nulou označují *dostředivý* (ve smyslu $r \to 0$) směr zrychlení. Obecně platí, že průběhy na různých θ jsou pro dané a/M podobné, liší se především šířkou, která je dána rozsahem povolených rychlostí (2.15).





Obrázek 3.2.: $\kappa_1(r, \Omega)$ pro $\theta = \pi/2, 3\pi/8$, $a = 0$
Barevné značení odpovídá obrázku 3.1. Extremálně urychleným pozorovatelům odpovídají body, v nichž mají křivky lokální extrémy a zároveň v nich mají nenulovou hodnotu.

zorovatelé, kterým odpovídají různé lokální extrémy κ_1. Jeden je statický (extrém v $\Omega = 0$) a existuje v celé oblasti nad horizontem. Další dva odpovídají minimům symetricky položeným kolem $\Omega = 0$ a existují pouze nad $r = 3M$. Navíc se pro $\theta \to \frac{\pi}{2}$ stávají jejich minima „ostřejšími" a hodnoty v nich se blíží k nule. V ekvatoriální rovině pak v bodech lokálních minim není derivace $\partial\kappa_1/\partial\Omega$ spojitá a zrychlení je tam nulové.[4] Zmínění dva extremálně urychlení pozorovatelé tedy v limitě přecházejí v pozorovatele geodetické[5].

Při zvětšování parametru a (pro výpočty používáme $M = 1$, takže číselně platí $a = a/M$ – extrémní Kerrově černé díře tedy odpovídá hodnota $a = 1$) především přestávají být ekvivalentní směry oběhu pozorovatelů $\pm|\Omega|$. To se projevuje například rozdělením fotonových orbit v ekvatoriální rovině – prográdní na $r_{\mathrm{ph}+}$ [6] se posouvá směrem k horizontu, retrográdní[7] ($r_{\mathrm{ph}-}$) se od něj naopak vzdaluje. Pod $r_{\mathrm{ph}+}$ je chování veličin podobné schwarzschildovskému pod $r = 3M$, mezi fotonovými orbitami může být radiální složka 4-zrychlení jak přitažlivá pro některé kontrarotující pozorovatele, tak repulzivní pro pozorovatele dostatečně korotující. Pro $r > r_{\mathrm{ph}-}$ se průběhy zrychlení s rostoucí vzdáleností od zdroje blíží klasickému případu. To platí i mimo ekvatoriální rovinu, r, na nichž se mění chování, jsou však závislá na θ.

Další zajímavostí je, že na rozdíl od nerotující černé díry je složka a_θ (obr. 3.4) nenulová a kladná (tedy pro $\theta \in (0, \pi/2)$, „pod" ekvatoriální rovinou je naopak záporná) pro *všechny* povolené hodnoty Ω – směřuje tedy k ekvatoriální rovině.

Existence extremálně urychlených pozorovatelů je nejlépe patrná v ekvatoriální rovině (obr. 3.3). a_r (a tím pádem i κ_1) má extrémy pouze pro $r > r_{\mathrm{ph}+}$ a $r < r_{\mathrm{ph}-}$, mezi fotonovými orbitami je zrychlení ryze monotónní. Tyto dva typy EAO se liší i druhem extrému, který reprezentují. Zatímco vnitřní pozorovatel má vůči ostatním na stejné orbitě zrychlení nejmenší, vnější EAO velikost zrychlení maximalizuje. Vnější EAO tedy spíše odpovídá klasickému newtonovskému (stojícímu) pozorovateli, jehož zrychlení je také maximální.

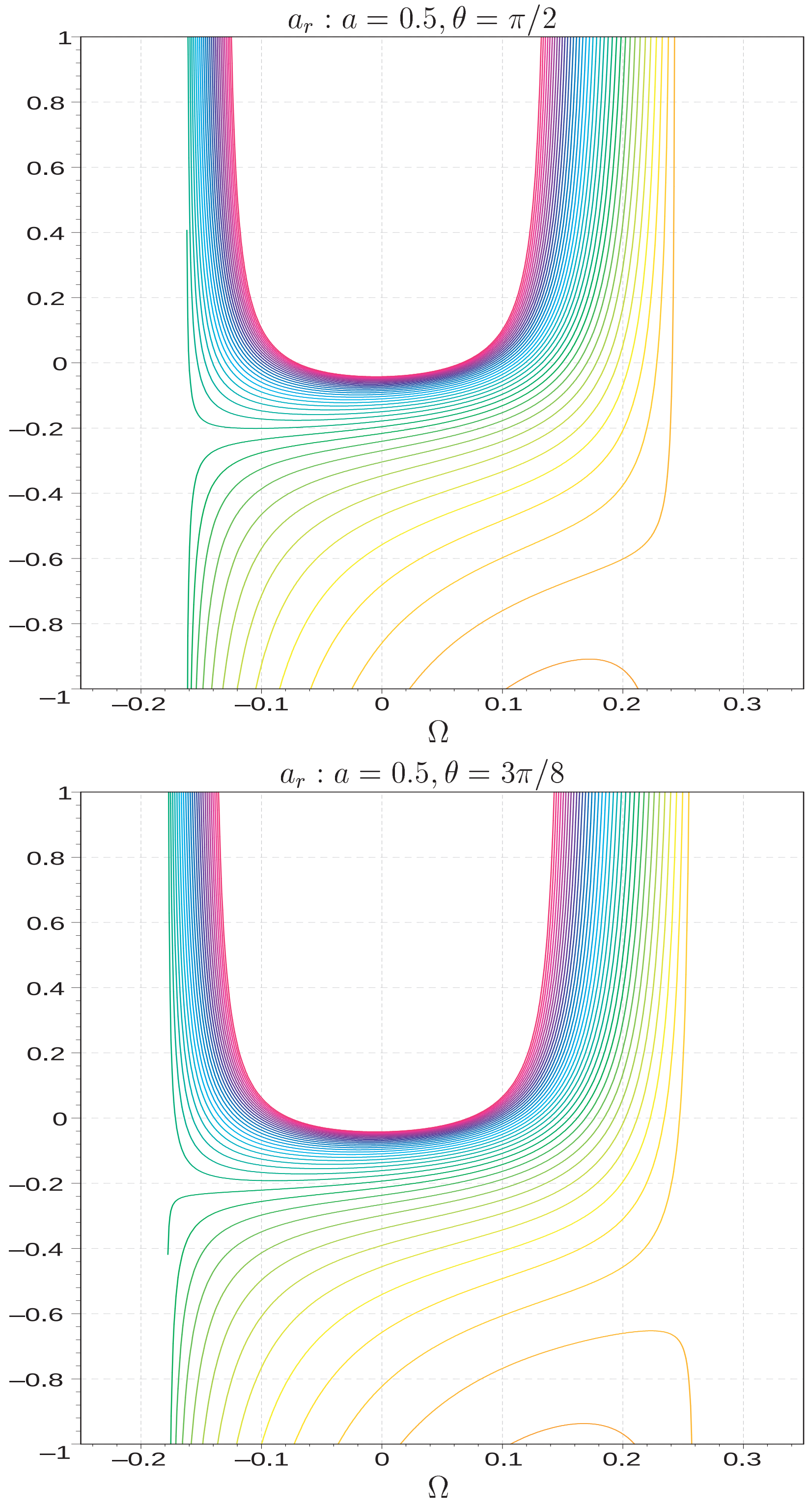
---

[4] κ_1 totiž neobsahuje informaci o směru zrychlení – pokud bychom ji zahrnuli (například vhodným přenásobením sign a_r), ukázalo by se, že derivace zrychlení je zde spojitá.

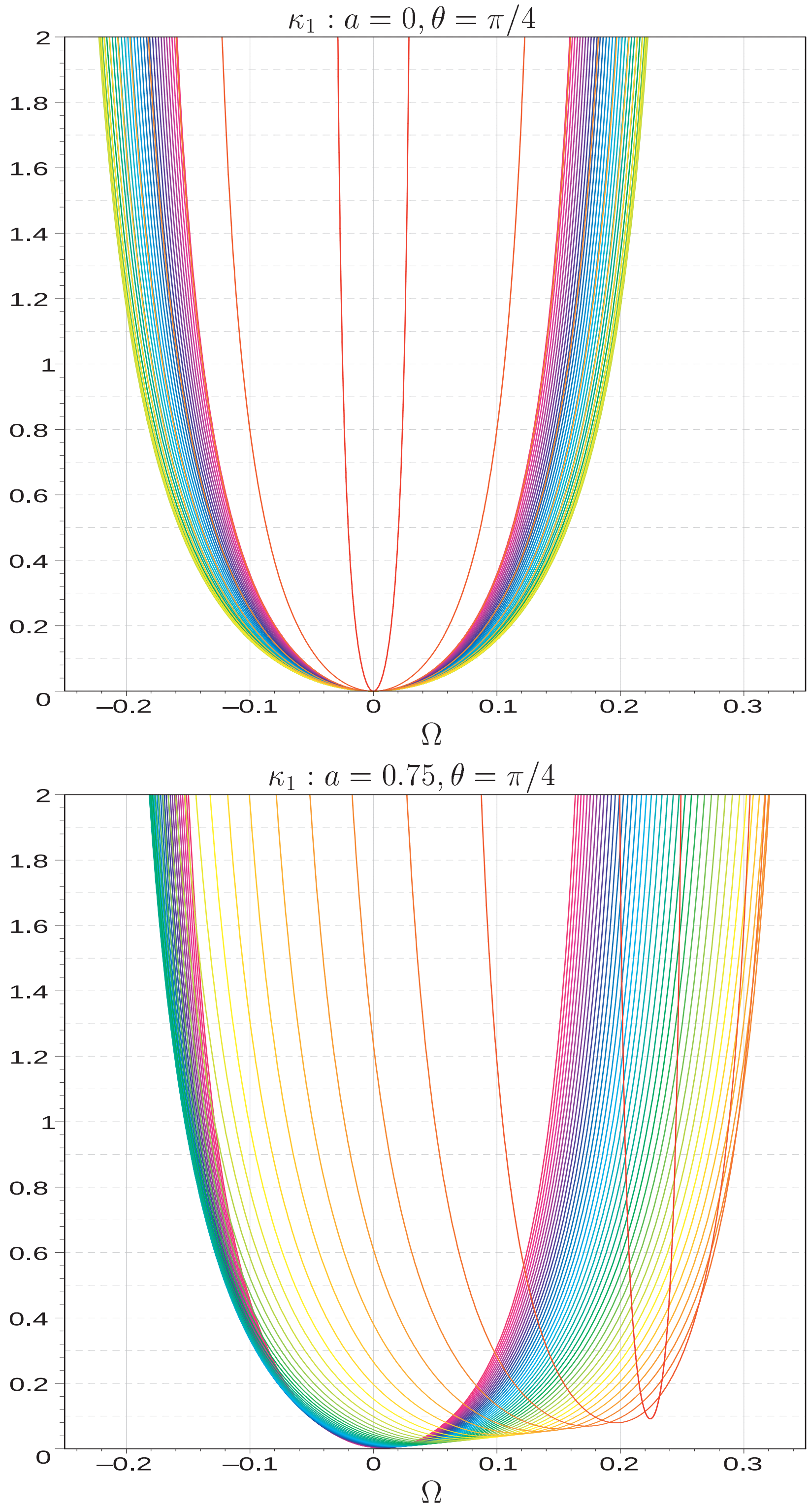
[5] kteří mají opravdu zaručeně nejmenší zrychlení. Také ze vztahu (2.29) je vidět, že pokud je 4-zrychlení nulové, jde v určitém smyslu o limitní případ EAO – samozřejmě ale podél takovéto trajektorie nelze sestrojit Frenetovu-Serretovu bázi.

[6] Pozor na značení: $r_{\mathrm{ph}+} < r_{\mathrm{ph}-}$ – znaménko odpovídá hodnotě Ω, nikoliv velikosti r jako je tomu např. u horizontů.

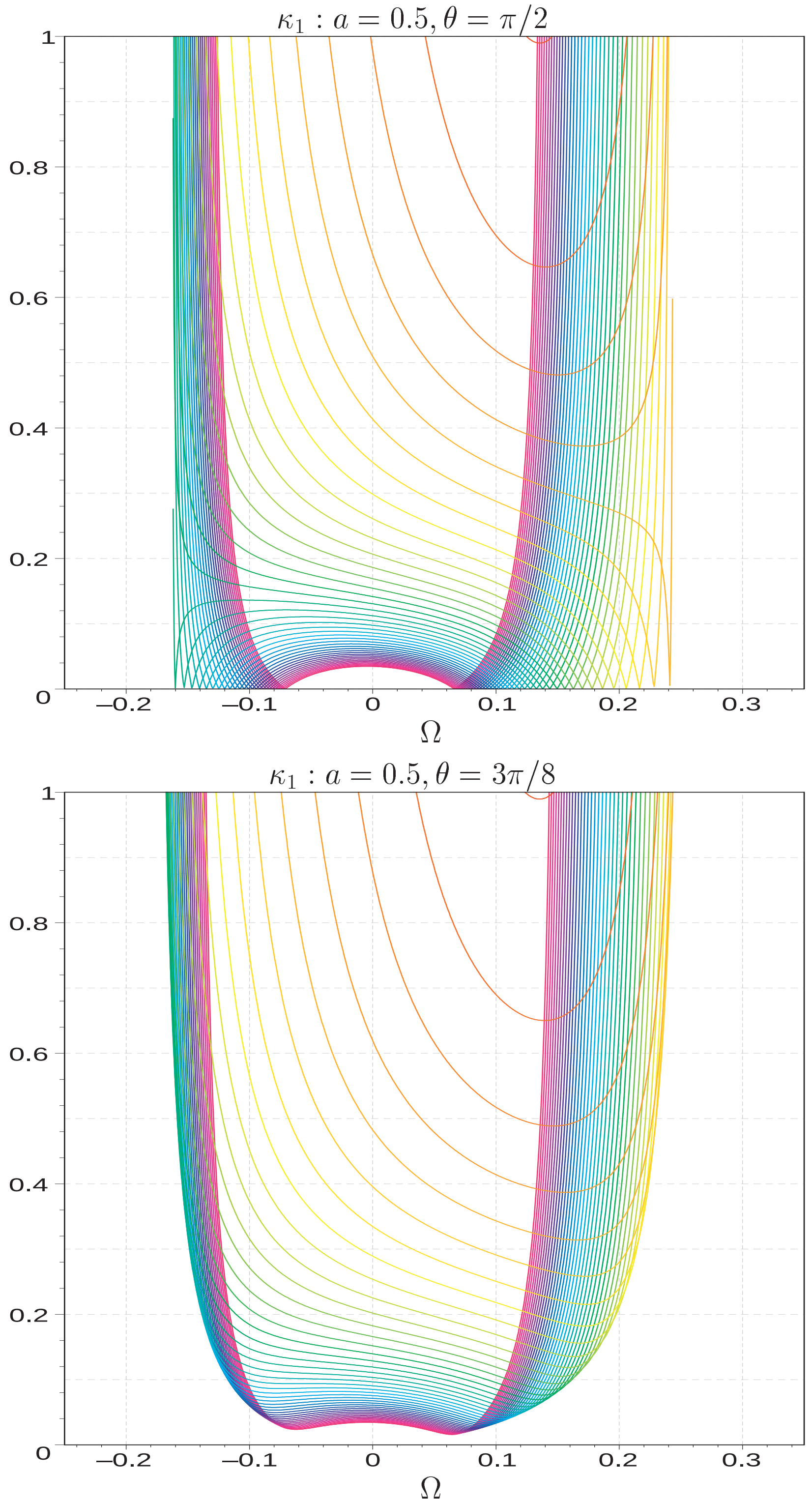
[7] V ergosféře je efekt strhávání prostoročasu natolik silný, že veškeré povolené pohyby mají $\Omega > 0$ a klasický pojem (ne)souhlasného oběhu osy vyžaduje zpřesnění. Ko-, resp. kontra-rotací proto rozumíme pohyb vůči prostoročasu (ZAMO), tedy relaci $\Omega \gtrless \omega$.



Obrázek 3.3.: $a_r(r, \Omega)$ pro $\theta = \pi/2, 3\pi/8$, $a = 0.75$



Obrázek 3.4.: $a_\theta(r, \Omega)$ pro $\theta = \pi/4$, $a = 0$ (nahoře), $a = 0.75$ (dole)



Obrázek 3.5.: $\kappa_1(r, \Omega)$ pro $\theta = \pi/2, 3\pi/8,\ a = 0.5$

Navíc porovnáním chování κ_1 na různých θ (obr. 3.5) zjišťujeme, že vnitřní EAO odpovídá limitě $\theta \to \pi/2$ stejného pozorovatele, jako korotující geodetický pozorovatel, rozdíl je pouze v souřadnici r. Podobně je tomu i u pozorovatele, který odpovídá druhému lokálnímu minimu κ_1. I ten pro $\theta \to \pi/2$ přechází v geodetického pozorovatele (ovšem kontrarotujícího).

Tyto pozorovatele zde budeme označovat jako *nepravé* extremálně urychlené[8] a pro testování průběhu pole je nepoužijeme. První z nich (tedy korotující) existují v celé oblasti, která nás zajímá, a byli by tedy ideálními kandidáty na popis gravitačního pole. Jak ale uvidíme dále, ekvipotenciály jimi měřeného pole jsou ve velké části prostoročasu deformovány právě kvůli limitnímu přechodu v geodetické pozorovatele (kteří tíži nepociťují). Stejnou vlastnost má i kontrarotující nepravý EAO, který navíc existuje ve stejné oblasti jako poslední – *pravý* – extremálně urychlený pozorovatel.

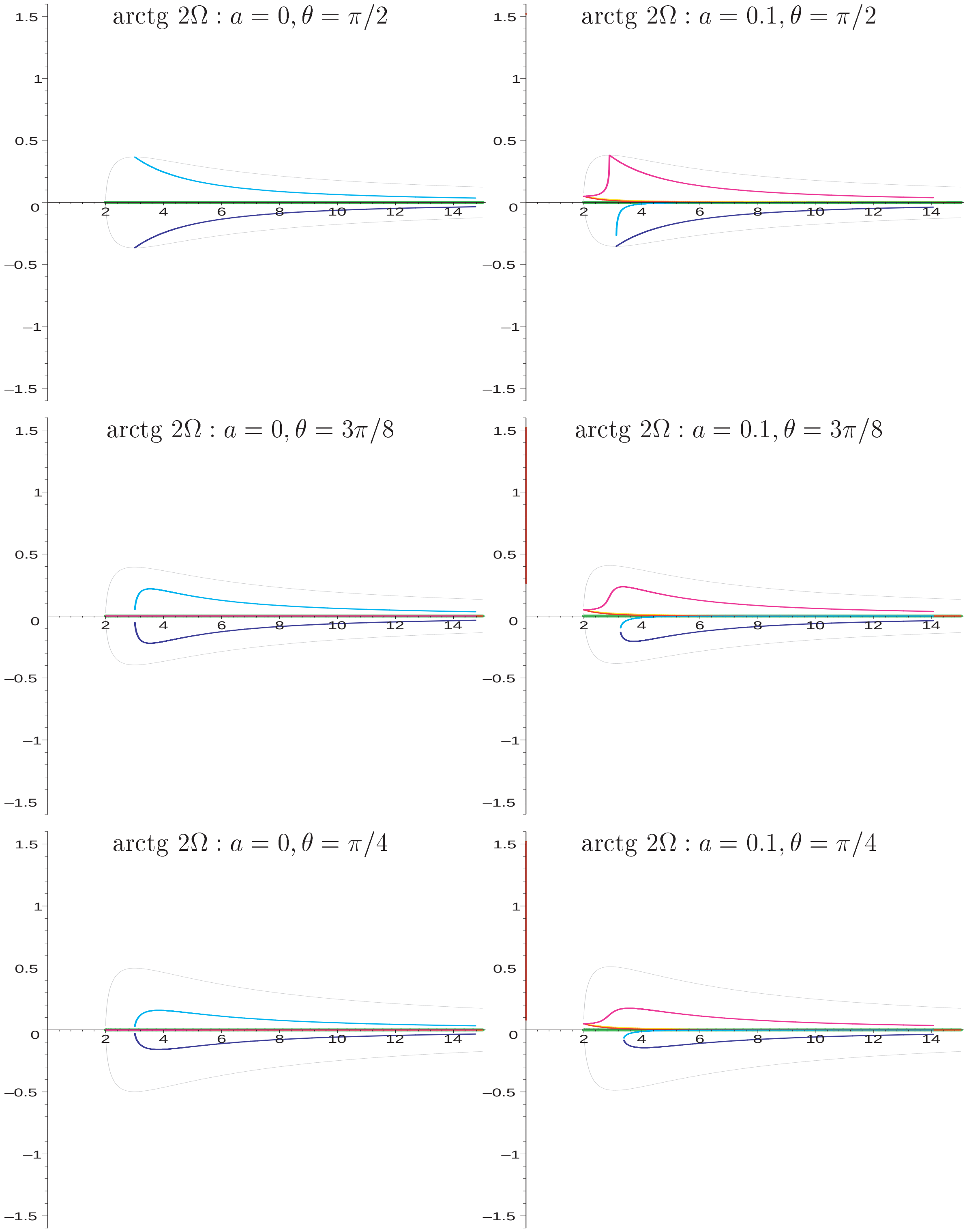
Jemu odpovídá lokální maximum, poslední extrém $\kappa_1(\Omega)$. Tito pozorovatelé existují pouze pro $r > r_{\mathrm{EAO}}$, které je závislé na θ – v ekvatoriální rovině nabývá minima $r_{\mathrm{EAO}} = r_{\mathrm{ph}-}$.

Průběh úhlových rychlostí pro různé kongruence v několika prostoročasech je znázorněn na obr. 3.6 – 3.8.

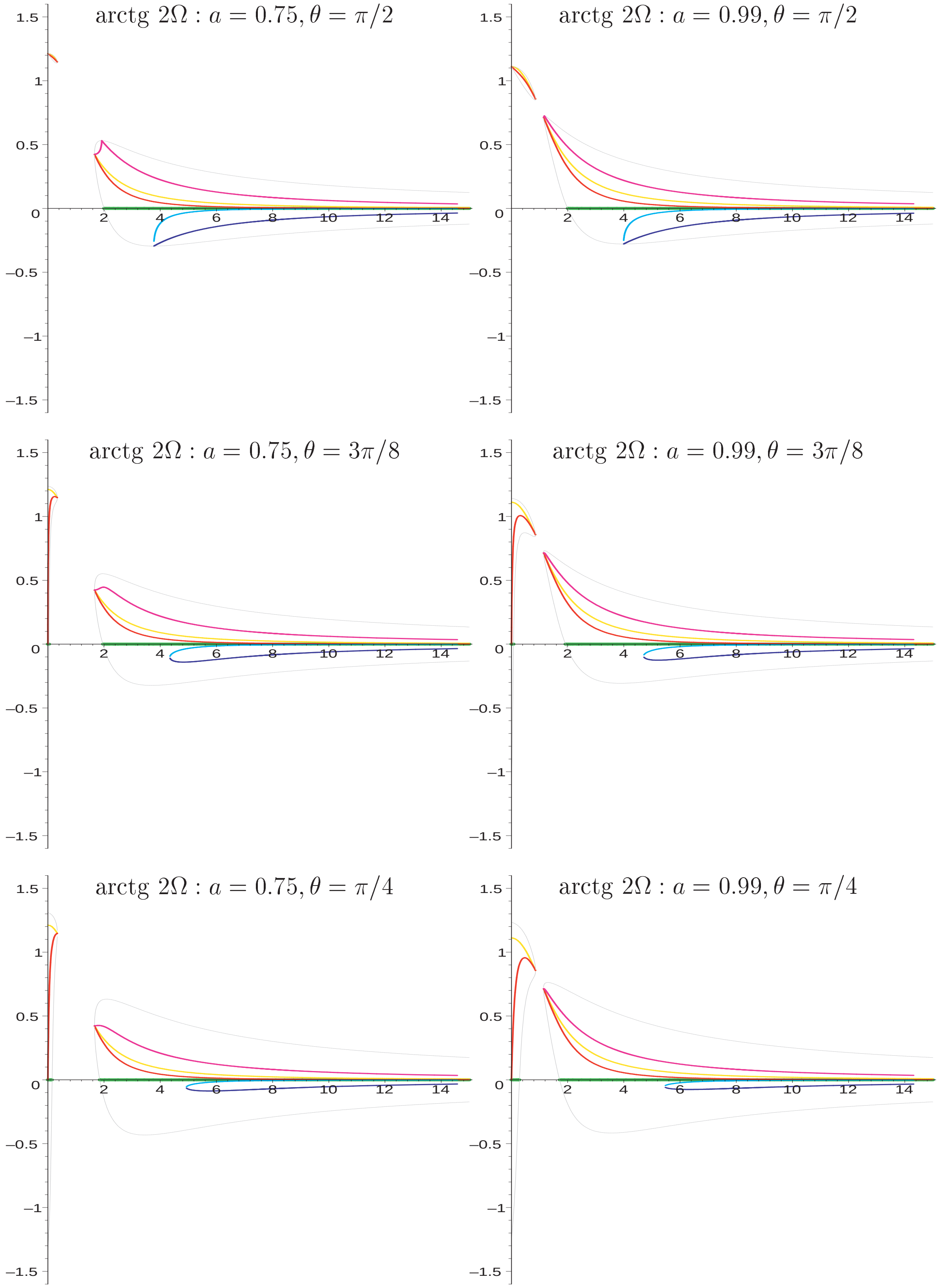
3.2.1. Nahé singularity

Pro nahé singularity je situace poněkud složitější. Do přístupného regionu totiž spadají i ty části prostoročasu, které jsou v černoděrových řešeních skryty pod horizonty. Právě zde, v oblasti $r \lesssim a$, má pole komplikovanou strukturu. Například $r = a, \theta = 0$ je geodetika, ekvipotenciály intenzity tíhového pole mohou být (jak uvidíme dále) uzavřené plochy neobsahující singularitu apod. – na obr. 3.9 například vidíme, že mimo ekvatoriální rovinu pro $r \to 0$ („oranžová část“ grafů) velikost zrychlení pro (nepravého) EAO neroste monotónně, ale pro určitá r klesá a $\kappa_{1\mathrm{EAOn}}$ nabývá lokálního minima.

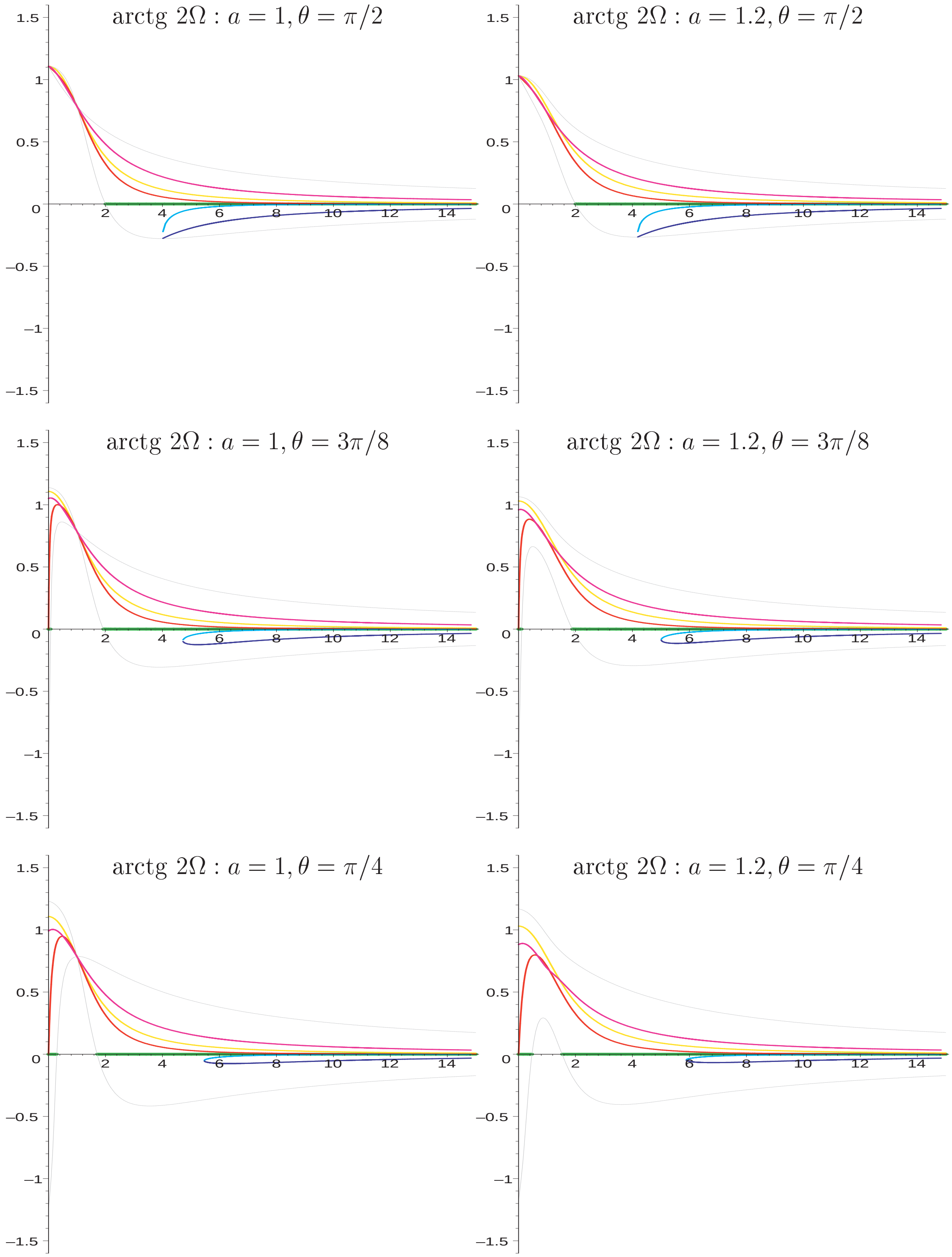
[8] index EAOn



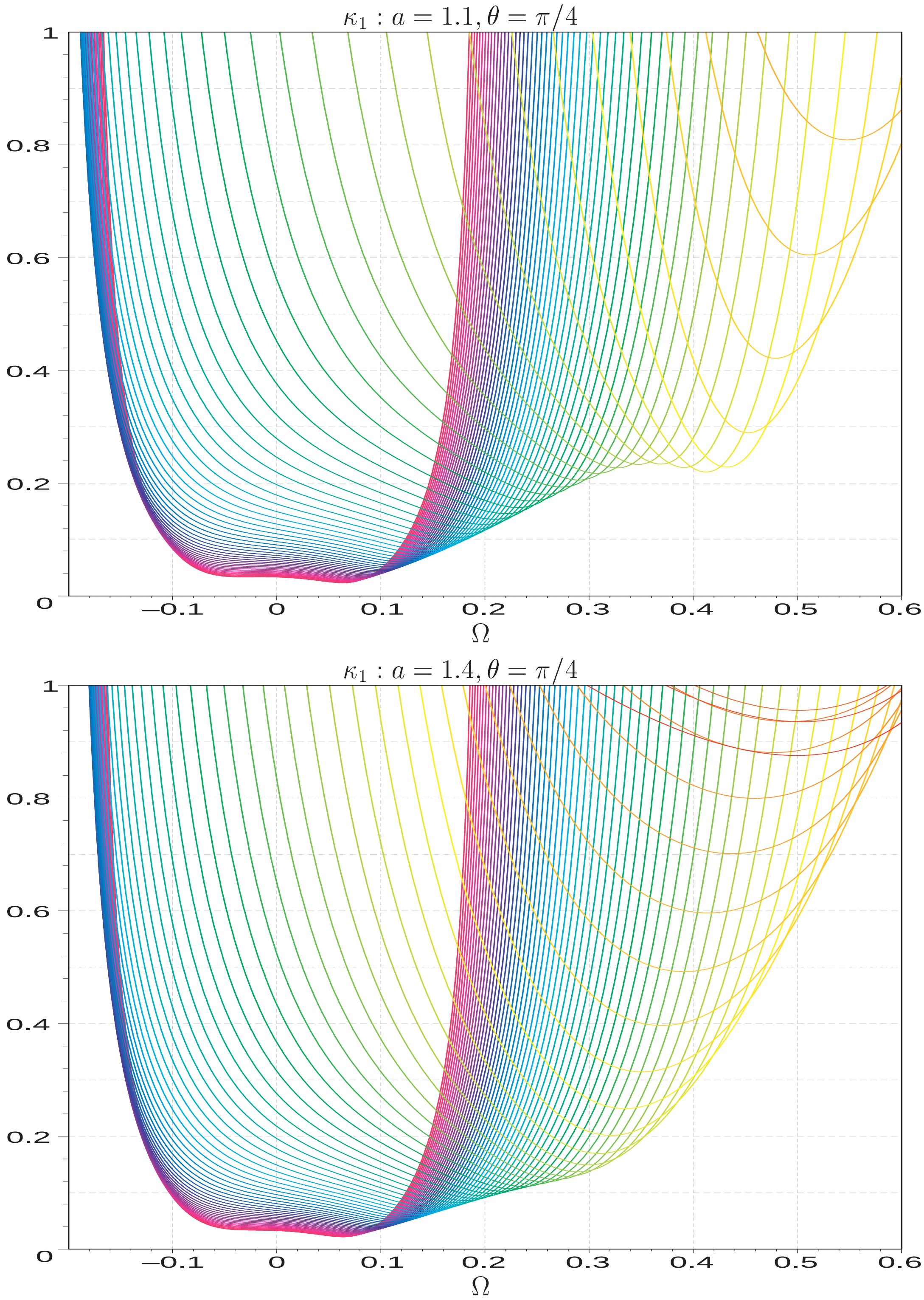
Obrázek 3.6.: Radiální průběhy úhlových rychlostí Ω významných stacionárních pozorovatelů pro $\theta = \pi/2, 3\pi/8, \pi/4$, $a = 0$ – Schwarzschild (vlevo), $a = 0.1$ (vpravo) vodorovná osa je r v jednotkách M, grafy jsou přeškálovány funkcí $\Omega \to \mathrm{arctg}(2\Omega)$.
Barvy jednotlivých pozorovatelů (podle klesajícího Ω na $r = 6M$): korotující nepravý EAO – růžová, CO – žlutá, ZAMO – červená, SO – zelená, pravý EAO – modrá, kontrarotující nepravý EAO – fialová; šedě je vyznačen rozsah povolených hodnot Ω.



Obrázek 3.7.: Radiální průběhy úhlových rychlostí Ω významných stacionárních pozorovatelů pro $\theta = \pi/2, 3\pi/8$, $a = 0.75$ (vlevo), $a = 0.99$ (vpravo)



Obrázek 3.8.: Radiální průběhy úhlových rychlostí Ω významných stacionárních pozorovatelů pro $\theta = \pi/2, 3\pi/8$, $a = 1$ – extrémní Kerrova černá díra (vlevo), $a = 1.2$ – nahá singularita(vpravo)



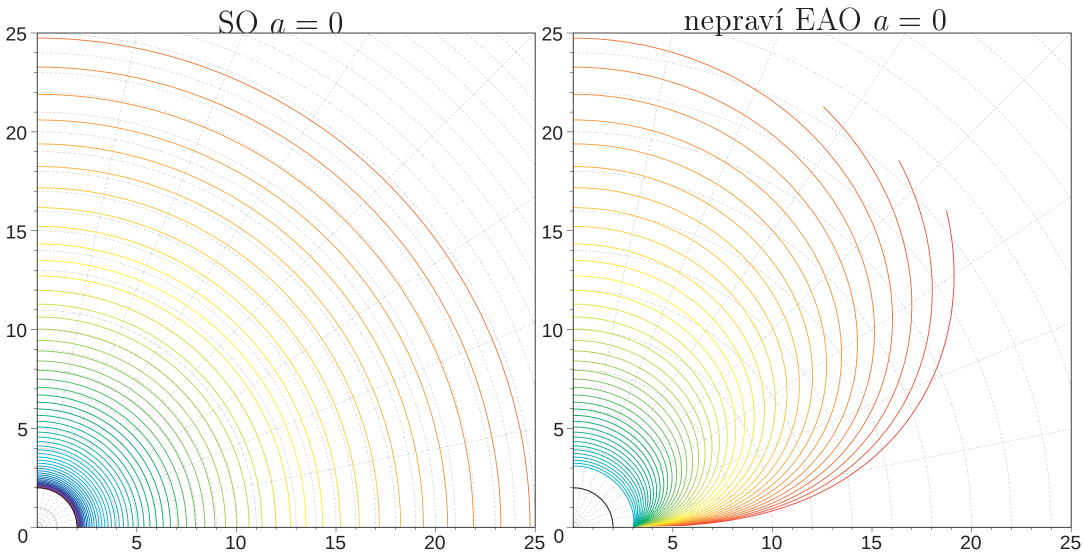
Obrázek 3.9.: $\kappa_1(r, \Omega)$ pro nahou singularitu. $\theta = \pi/4$, $a = 1.1$ (nahoře), $a = 1.4$ (dole)

3.3. Tvar tíhového pole

Pro Schwarzschildovu černou díru je tvar ekvipotenciál samozřejmě nejpodobnější klasickému případu. Všichni „zajímaví“ pozorovatelé jsou identičtí, tedy stojící, ekvipotenciály jejich tíhového pole jsou sféry. Nepraví EAO však existují pouze nad $r = 3M$, tedy nad fotonovými orbitami. Situace je zachycena na obr. 3.10.

Je vidět, že nepraví EAO skutečně nejsou příliš vhodnými kandidáty pro popis tíhového pole. Ve statickém případě totiž nepokrývají celou oblast, nekryjí se s ostatními význačnými kongruencemi a jejich ekvipotenciály jsou kvůli limitě v ekvatoriální rovině silně deformovány. To má za následek, že různé charakteristiky těchto ploch se chovají „divoce“. Navíc je tato deformace přítomná pro všechna r, ekvipotenciály tedy s rostoucí vzdáleností od centra nepřecházejí ve sféroidy $r = konst.$

Pokud nyní zvětšíme rotační parametr a, dojde především k odštěpení ostatních kongruencí od statických pozorovatelů, kteří existují pouze vně statických mezí. Dále přestanou v blízkosti singularity pro určitá θ existovat extremálně



Obrázek 3.10.: Ekvipotenciály tíhových polí pro Schwarzschildovu černou díru
Statičtí (vlevo) a nepraví extremálně urychlení pozorovatelé (vpravo) v Kerrových-Schildových souřadnicích. Barvy označují velikost κ_1^2, červená část spektra značí slabé pole, fialová silné. Na všech obrázcích je barevné značení stejné (tj. jedné intenzitě odpovídá vždy stejná barva). Krok mezi křivkami je $e^{\pm 1/4}$ v κ_1^2. Horizont(y) $r_\pm$ jsou vyznačeny černě, statické meze $r_{0,1}$ šedě. Pro názornost jsou tečkovaně vyneseny BL souřadnice. Poslední červené kontury jsou nedokončené z důvodu omezení výpočtu, ve skutečnosti sahají až k ose. Lineární souřadnice jsou škálovány parametrem M.

urychlení pozorovatelé – na obrázcích se to projeví tím, že jejich ekvipotenciály nebudou od ekvatoriální roviny dosahovat až k ose. To je způsobeno složkou zrychlení a_θ, která je natolik velká, že v κ_1 potlačí vliv extrému a_r a velikost 4-zrychlení má pak pouze jeden extrém.

Pro nízké hodnoty parametru a je těsně nad horizontem oblast, kde existuje „pravý-nepravý“ EAO, tedy ten, který v limitě $\theta \overset{\kappa_1 = konst.}{\longrightarrow} \pi/2$ přechází na „pravého“ korotujícího EAO pod vnitřní rotosférou. Vzhledem k tomu, že existuje pouze ve velmi omezené oblasti (pro vnitřní fotonovou orbitu platí $r_{\mathrm{ph}+} \leq 3M$) považujeme ho za irelevantního.[9]

Příklady ekvipotenciál pro různé pozorovatele kolem rotující černé díry jsou na obrázcích 3.11 – 3.13.

Jak jsme uvedli na začátku této kapitoly, vnitřek černé díry ze zkoumání vylučujeme – výjimku učiníme pouze pro extrémní Kerrovu černou díru ($a = 1$). Pro $a < 1$ jsou oblasti, kde mohou stacionární pozorovatelé existovat, odděleny prostorem mezi horizonty a ekvipotenciály tíhového pole se směrem k horizontům (nebo v případě statických pozorovatelů ke statickým mezím) zhušťují. Ne tak pro extrémní případ, kde horizonty splývají. V tomto případě ekvipotenciály procházejí přes horizont. Toto chování se může zdát podezřelé, protože často zaváděná povrchová gravitace černé díry[10] (viz např. [10])

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu \chi^\nu)(\nabla_\mu \chi_\nu) \ , \tag{3.9}$$

kde

$$\chi^\mu = \eta^\mu + \omega_{\mathrm{H}} \xi^\mu \tag{3.10}$$

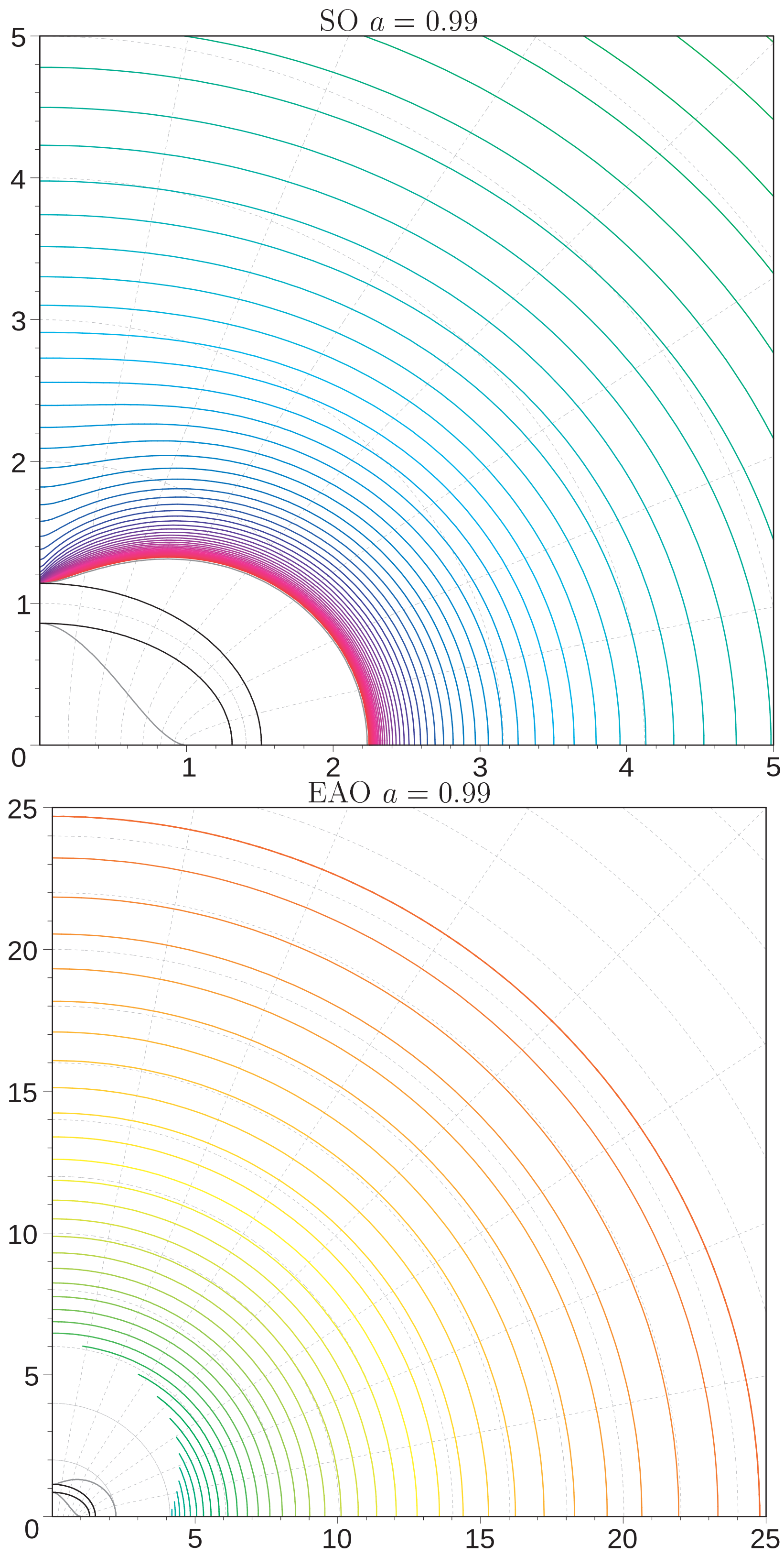
je generátor horizontu, je totiž (stejně jako úhlová rychlost rotace horizontu ω_{H}) na celém horizontu konstantní a zároveň úměrná velikosti 4-zrychlení. Na horizontu je povolena jediná úhlová rychlost $\Omega = \omega = \omega_{\mathrm{H}}$, což s ohledem na vztah (2.13) znamená, že χ^μ a u^μ se liší pouze normalizačním faktorem u^t.

Pro extrémní černou díru je však

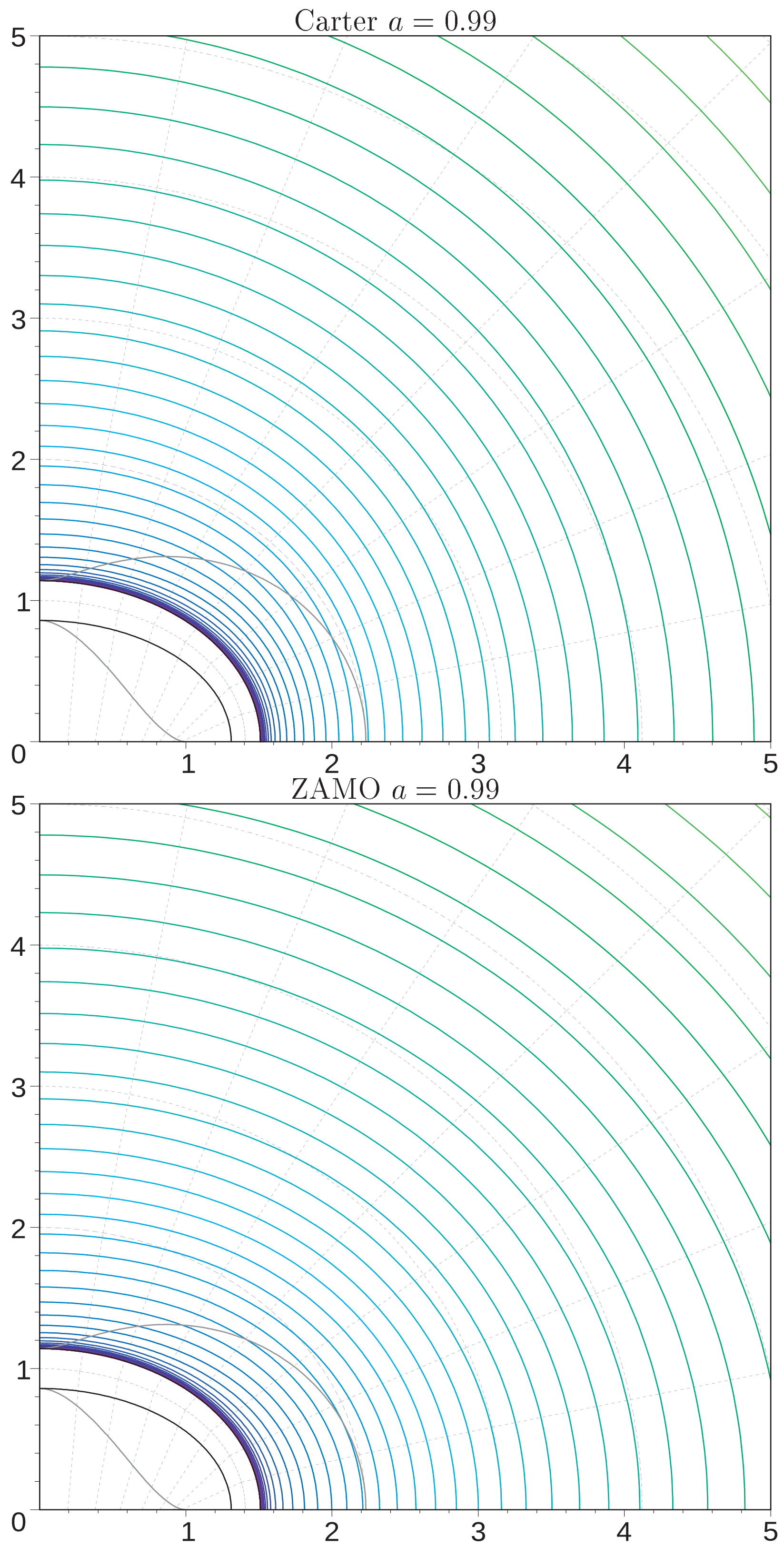
$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2M(M + \sqrt{M^2 - a^2})} \tag{3.11}$$

[9]K tomu samozřejmě přispívá i skutečnost, že je tento pozorovatel svázán s nepravým. Fakt, že ze všech pozorovatelů v daném bodě pociťuje minimální tíhu, je naopak přijatelná vlastnost, uvážíme-li, že leží pod vnitřní rotosférou (a samozřejmě s ohledem na průběh 4-zrychlení ve Schwarzschildově řešení).

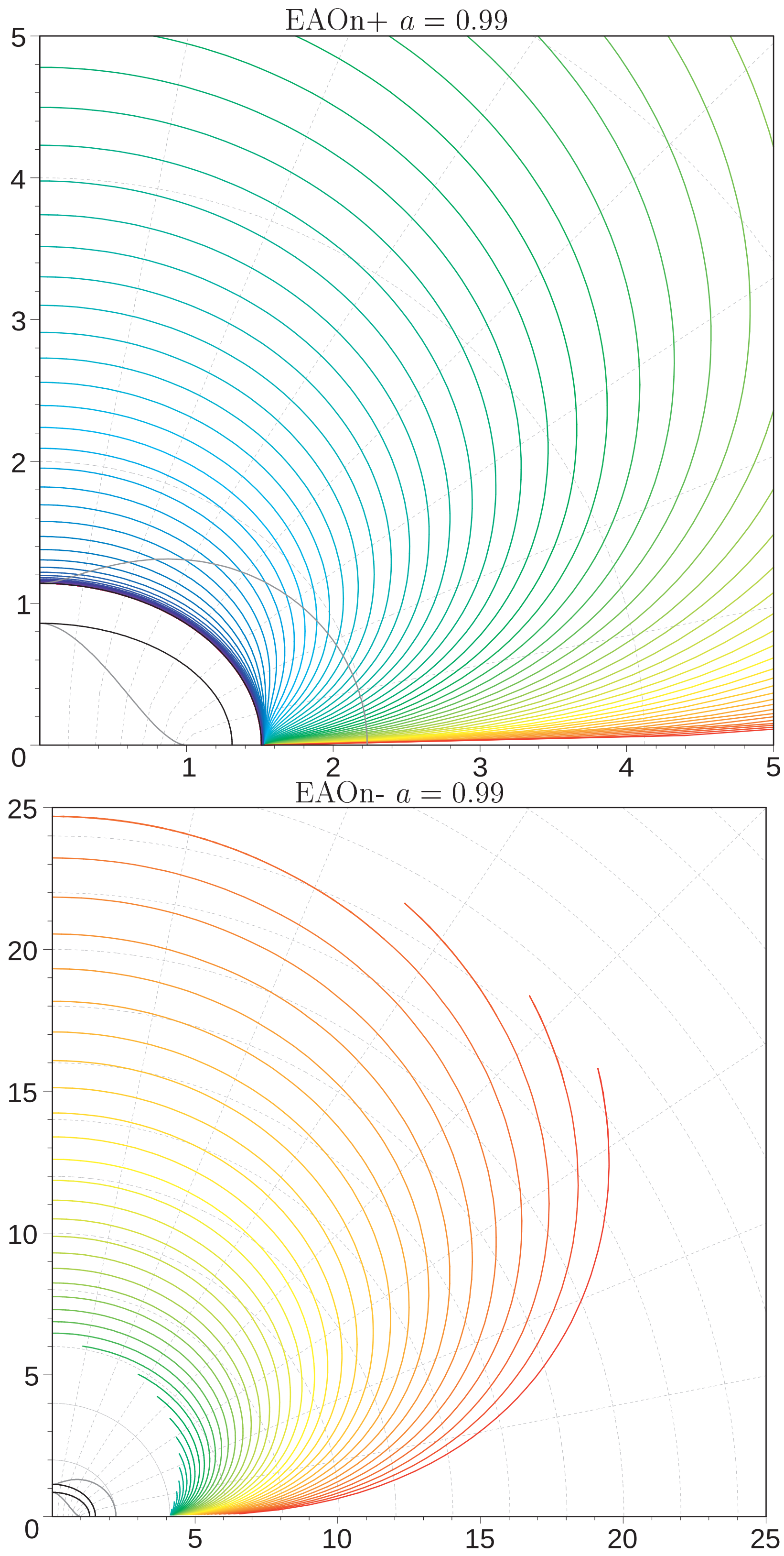
[10]Neplést s velikostí 4-zrychlení, tato veličina je definována pouze na horizontu.



Obrázek 3.11.: Ekvipotenciály tíhového pole pro $a = 0.99$
Statický pozorovatel (nahoře) a (pravý) extremálně urychlený (dole). Pro SO je zobrazena pouze centrální část, s rostoucím r se plochy všech pozorovatelů (vyjma nepravých EAO) blíží sféroidům $r = konst.$



Obrázek 3.12.: Ekvipotenciály tíhového pole pro $a = 0.99$
Carterův pozorovatel (nahoře) a ZAMO (dole).



Obrázek 3.13.: Ekvipotenciály tíhového pole pro $a = 0.99$
Korotující (nahoře) a kontrarotující (dole) nepraví EAO.

nulová, a to právě díky faktoru úměrnosti vůči κ_1. Křížení horizontu *různými* ekvipotenciálami (obr. 3.14 a 3.15) tedy není vyloučené – na horizontu se pouze pozorovatel takovéto (horizont křížící) kongruence stává světelným a na druhé straně horizontu opět časupodobným.

3.3.1. Nahé singularity

Případy $a > 0$ (obr. 3.16 a 3.17) přinášejí do ekvipotenciálami definované struktury pole několik „nových prvků". Zaprvé je to již zmiňovaná geodetika $(\theta = 0, r = a)$, která kolem sebe vytváří „ostrůvek" slabého gravitačního pole. Zadruhé, úplným (v tom smyslu, že není zapotřebí, aby se pozorovatel stal světelným, jako v případě extrémní Kerrovy černé díry na horizontu) propojením oblastí $r \sim 0$ a $r > a$ dochází u některých ploch k vytváření toroidálních oblastí (namísto klasických sféroidálních), které obklopují singularitu – ať již ve formě obalu statických mezí (pro statické pozorovatele), nebo přímo singularity jako takové (Carterova kongruence).

Carterovi a ZAMO pozorovatelé se navíc v ekvatoriální rovině stávají pro některá a a r geodetickými, což se projevuje podobně jako u geodetiky na ose symetrie vytvořením „ostrůvků". Existence a umístění těchto geodetik jsou však dány analyticky obecně neřešitelným polynomem (pro ZAMO jde při pevném a o polynomu 5. stupně v r, u Carterovy kongruence o polynomu 13. stupně). Numericky jsme zjistili, že pro ZAMO geodetiky neexistují přibližně pro $a > 1.144$, pro Carterovy pozorovatele pak pro $a > 4.572$.

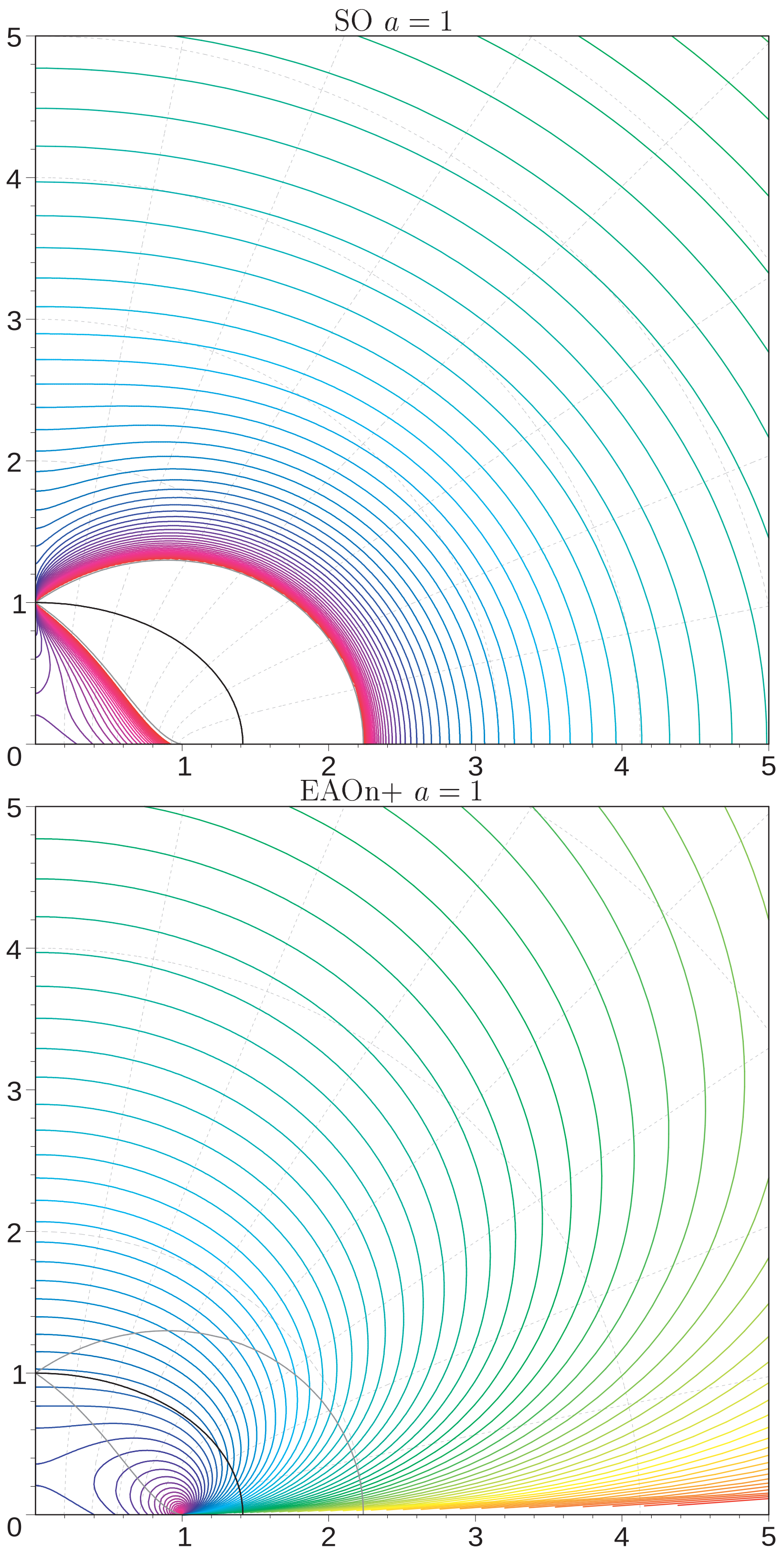
3.4. Některé charakteristiky ekvipotenciál

Pro porovnávání ekvipotenciálních ploch různých pozorovatelů, ať s klasickým případem nebo mezi různými kongruencemi navzájem, použijeme několika různých geometrických charakteristik daných ploch.

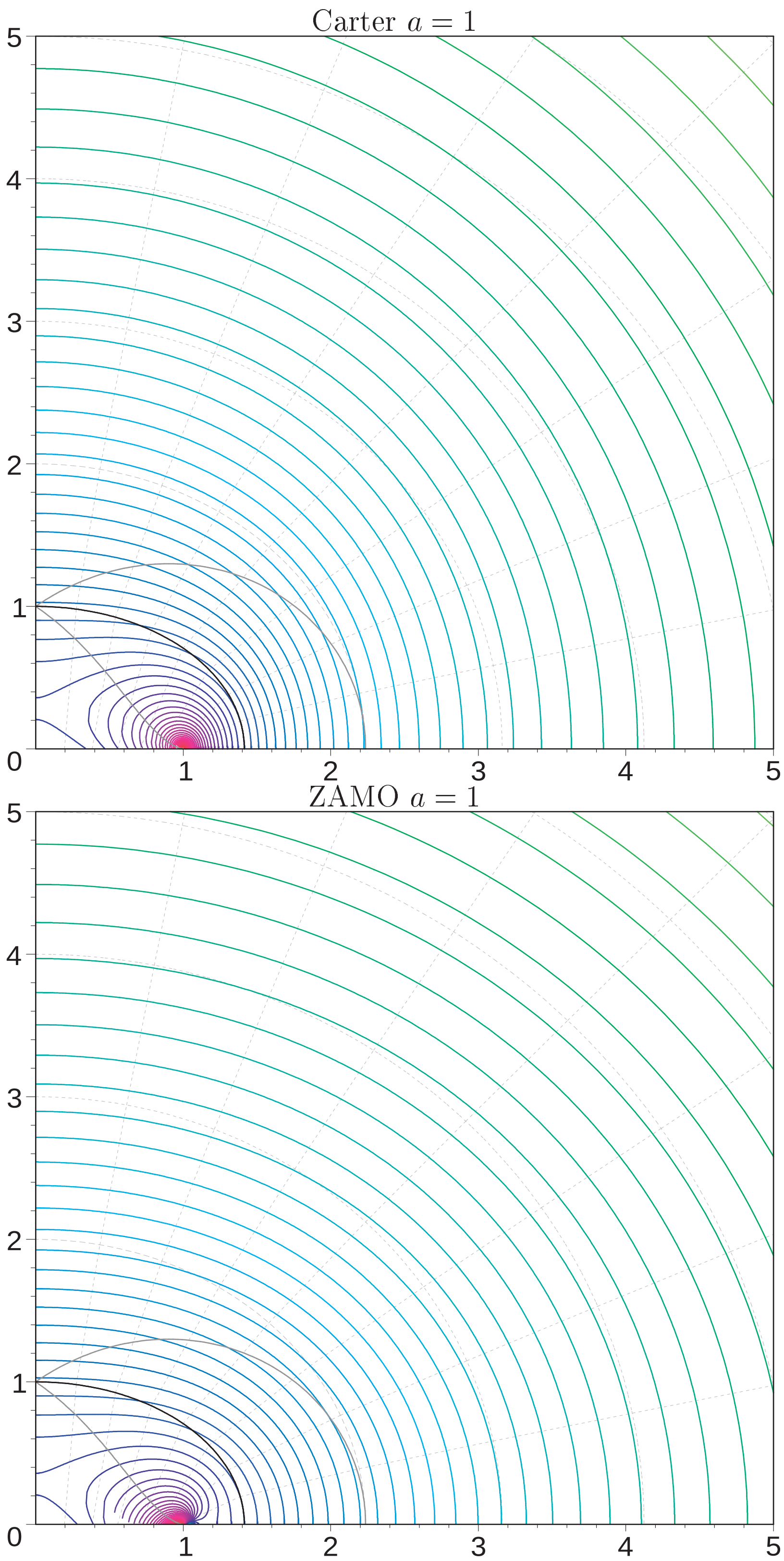
V první řadě jde o polární obvod

$$r_{\mathrm{polar}} = \int_E \mathrm{d}l = \int_E \sqrt{g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2 + g_{rr}\mathrm{d}r^2}\,, \tag{3.12}$$

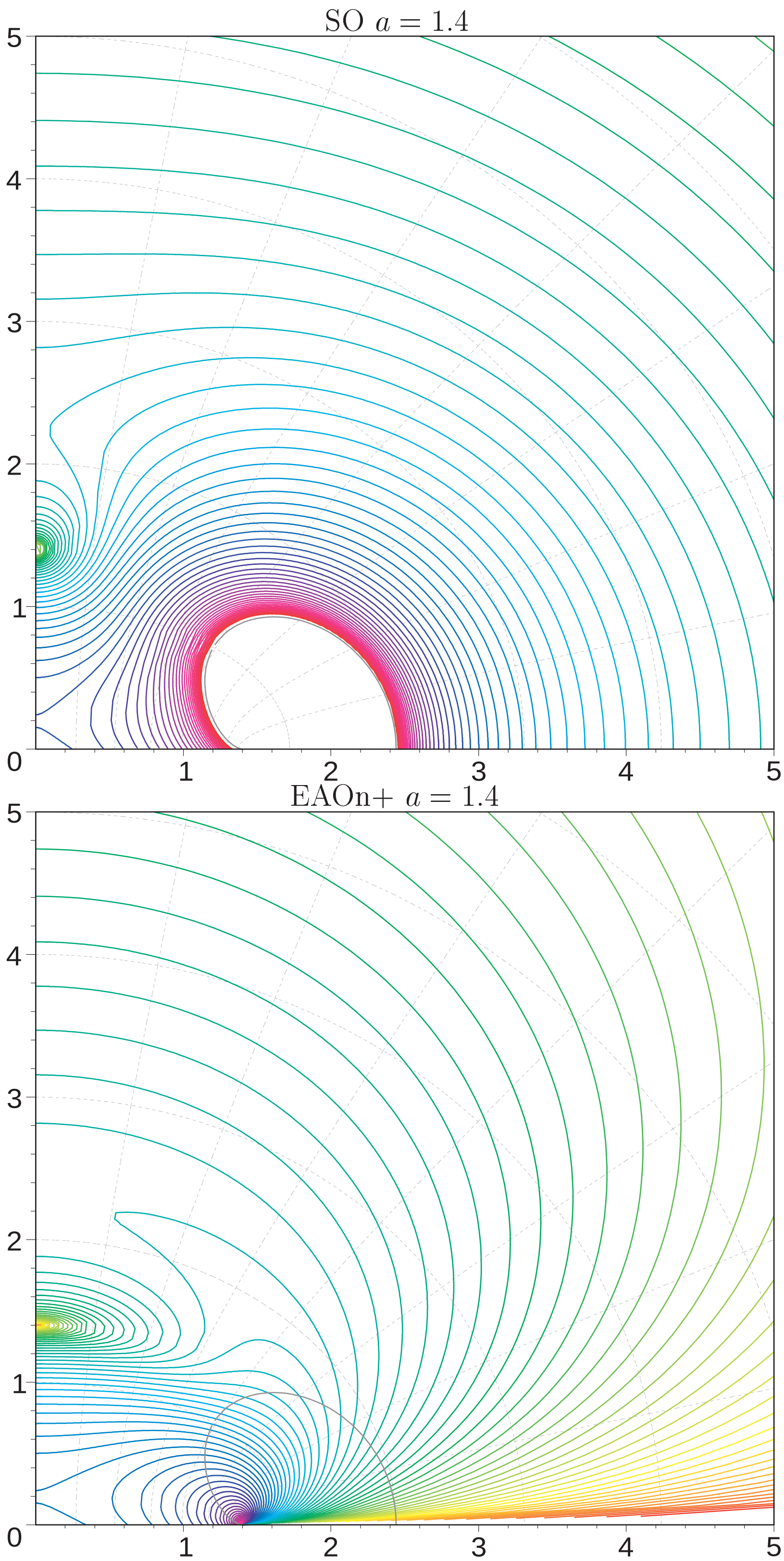
kde E je kontura v rovině (r, θ) a $\mathrm{d}l$ délkový element této křivky, a celkovou



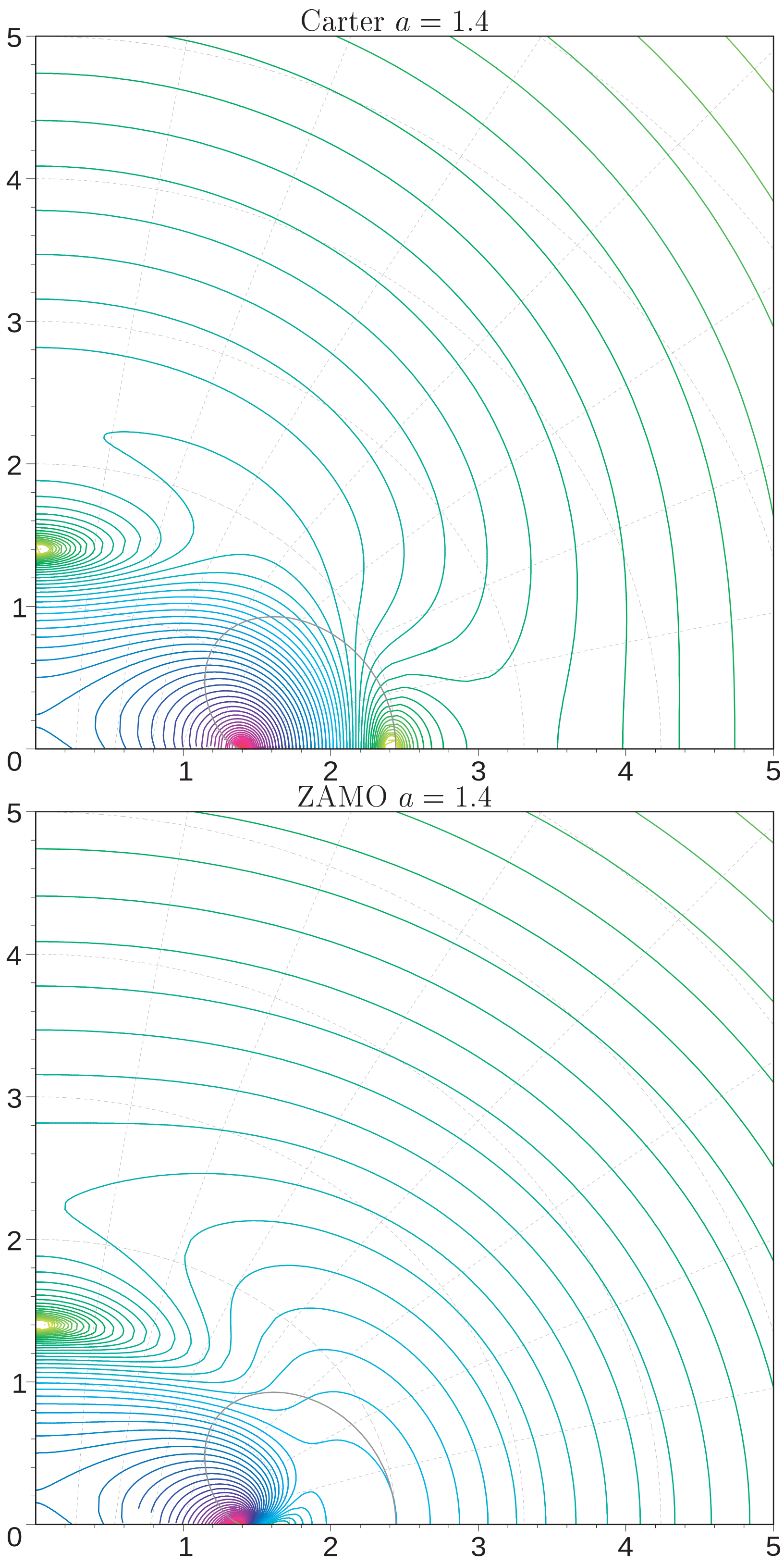
Obrázek 3.14.: Ekvipotenciály tíhového pole pro extrémní Kerrovu černou díru $a = 1$ Statický pozorovatel (nahoře) a korotující nepravý extremálně urychlený (dole). SO má ekvipotenciály nahuštěny kolem statických mezí.



Obrázek 3.15.: Ekvipotenciály tíhového pole pro extrémní Kerrovu černou díru $a = 1$ Carterův pozorovatel (nahoře) a ZAMO (dole).



Obrázek 3.16.: Ekvipotenciály tíhového pole pro nahou singularitu $a = 1.4$ Statický pozorovatel (nahoře) a korotující nepravý extremálně urychlený (dole).



Obrázek 3.17.: Ekvipotenciály tíhového pole pro nahou singularitu $a = 1.4$ Carterův pozorovatel (nahoře) a ZAMO (dole).

plochu danou integrálem

$$S = \int_0^{2\pi} \int_E \mathrm{d}l \sqrt{g_{\phi\phi}} \mathrm{d}\phi \; = 2\pi \int_E \sqrt{g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2 + g_{rr}\mathrm{d}r^2} \sqrt{g_{\phi\phi}} \mathrm{d}\phi \; . \tag{3.13}$$

Rovněž nás bude zajímat obvodový poloměr

$$r_{\mathrm{circ}} = \sqrt{g_{\phi\phi}} \; , \tag{3.14}$$

a to především v ekvatoriální rovině.

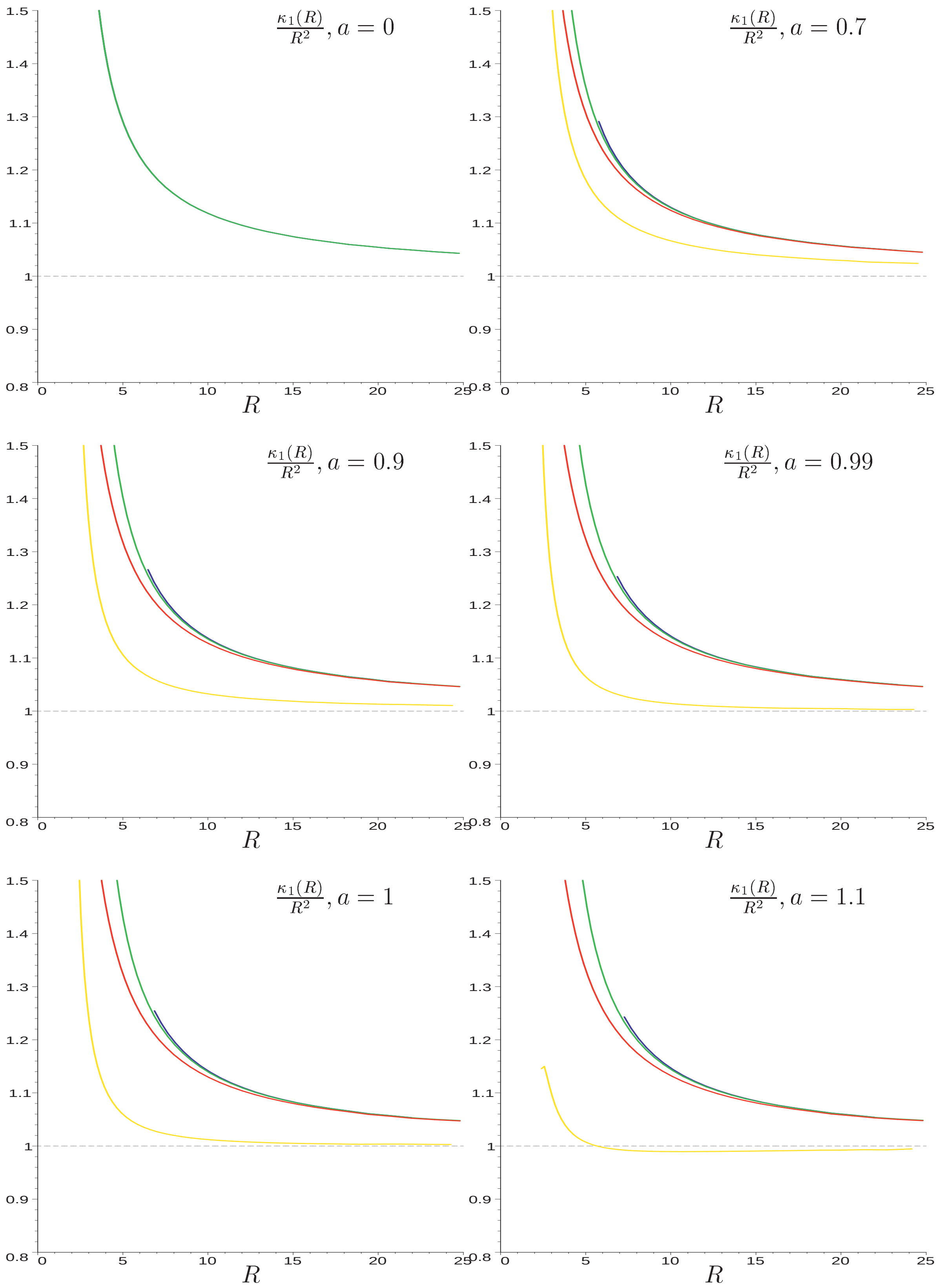
Na obr. 3.18 je vynesena velikost 4-zrychlení v ekvatoriální rovině v závislosti na obvodovém poloměru $r_{\mathrm{circ,eq}} = R$. Graf je přeškálován R^2, takže průběhu $1/r^2$ (platnému pro stojícího pozorovatele v newtonoském poli $-M/r$) odpovídá konstantní hodnota 1.

Pro $a = 0$ všichni pozorovatelé splývají a vidíme, že pole Schwarzschildovy černé díry je „silnější“, než klasické newtonovské. V případě rotujícího zdroje pociťuje největší zrychlení EAO, což jsme očekávali již kvůli jeho definici. Zajímavé je především chování Carterova pozorovatele. Zaprvé pociťuje nejmenší tíži, zadruhé je jeho zrychlení v případě nahých singularit *slabší* než v klasickém newtonovském případě. Je však zapotřebí mít na paměti, že poloměr, vůči němuž je zde zrychlení vztaženo, je sice obvodový, ale jde o obvod na *rovníku*. Mohou se zde projevit (a také se projeví) „nestandardní“ tvary ploch – zejména těch, které na ose začínají na $r < a$, tedy pod geodetikou $(\theta = 0, r = a)$. Zatřetí je průběh jeho zrychlení nejvíce závislý na parametru a.

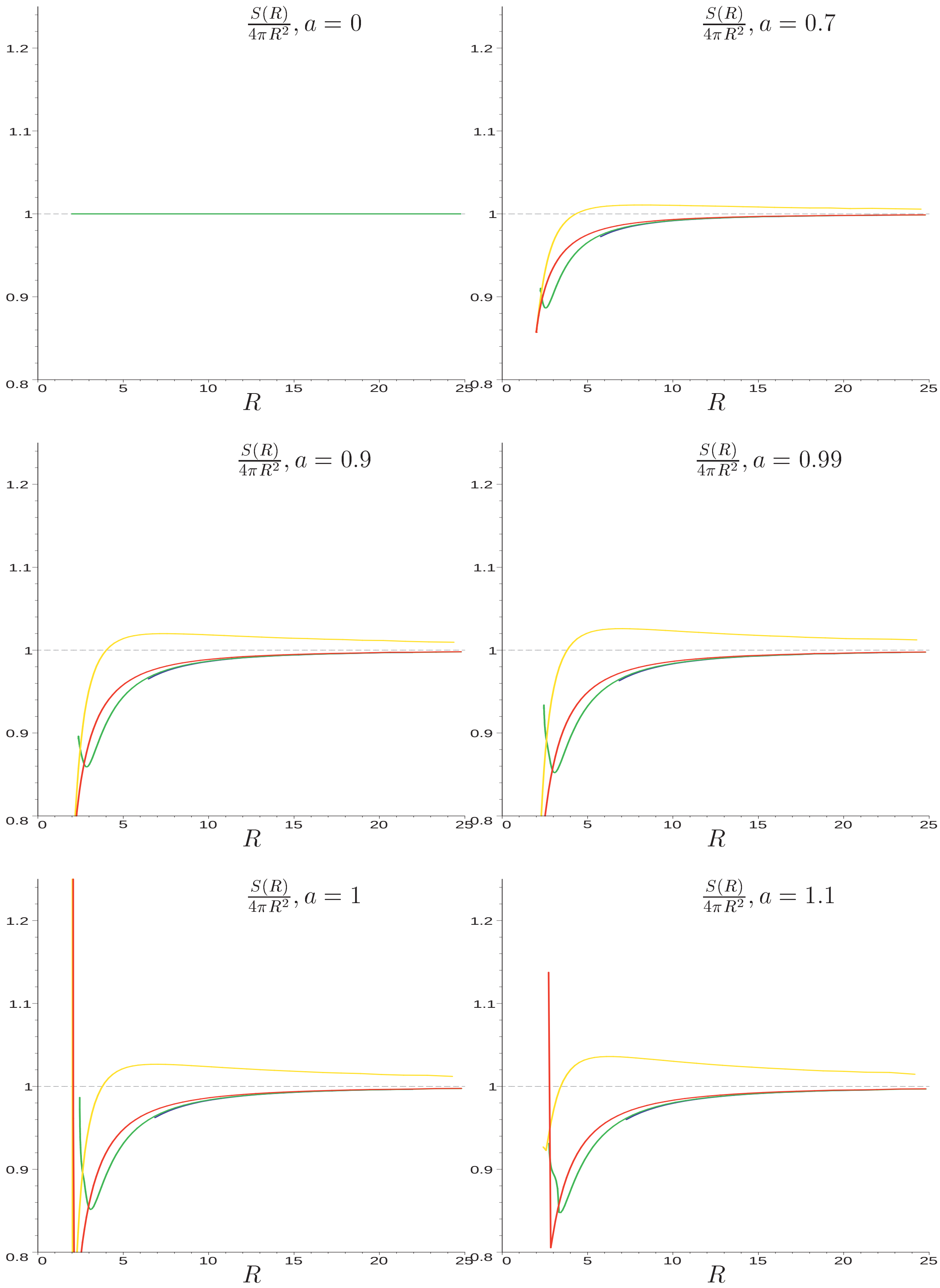
Podobně budou ovlivněny i závislosti celkového povrchu na poloměru a poměry polárního a rovníkového obvodu (zploštělost) na obr. 3.19 a 3.20.

Vidíme, že EAO mají nejmenší povrchy ekvipotenciál, které jsou zároveň nejvíce zploštělé (polární obvod je menší než rovníkový). Naopak Carterovi pozorovatelé jako jediní vykazují chování opačné – s rostoucím κ_1 a a jsou až do určitého poloměru jejich ekvipotenciály protáhlé ve směru osy symetrie a teprve v blízkosti horizontu se začnou zplošťovat. Navíc – na rozdíl od zbývajících pozorovatelů – pro nahé singularity pociťují slabší tíhu než klasický newtonovský pozorovatel.

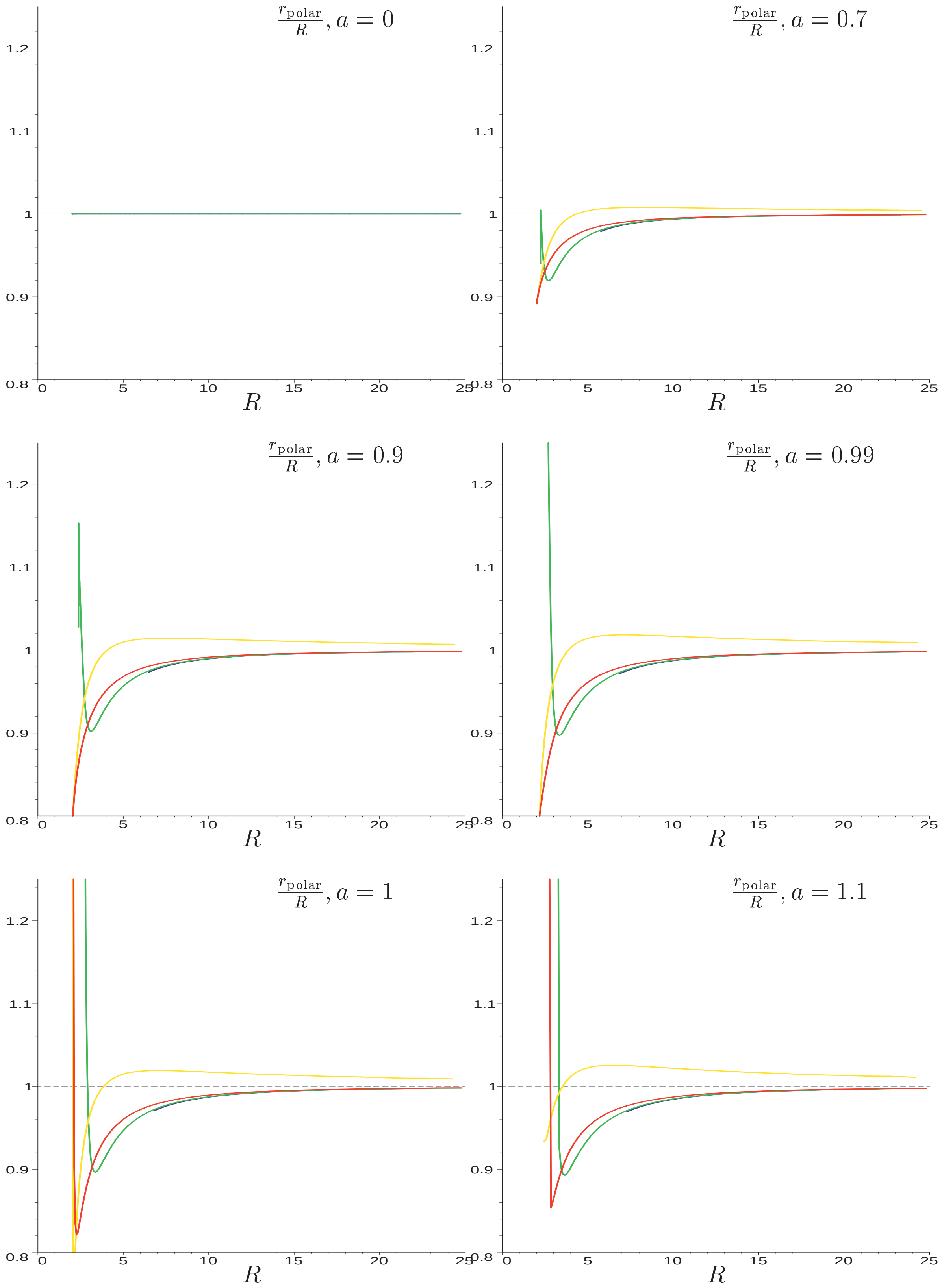
Specifické chování těchto charakteristik pro statické pozorovatele je způsobeno tím, že jejich povolená oblast je ohraničena statickou mezí, která může mít v případě černoděrového řešení o dost větší plochu než má horizont.



Obrázek 3.18.: $\kappa_1(R)/R^2$ pro $a = 0, 0.7, 0.9, 0.99, 1, 1.1$
barevné značení odpovídá obrázkům 3.6 – 3.8.



Obrázek 3.19.: Povrch ekvipotenciál $S(R)/4\pi R^2$ pro $a = 0, 0.7, 0.9, 0.99, 1, 1.1$



Obrázek 3.20.: Zploštělost $r_{\text{polar}}(R)/R$ pro $a = 0, 0.7, 0.9, 0.99, 1, 1.1$

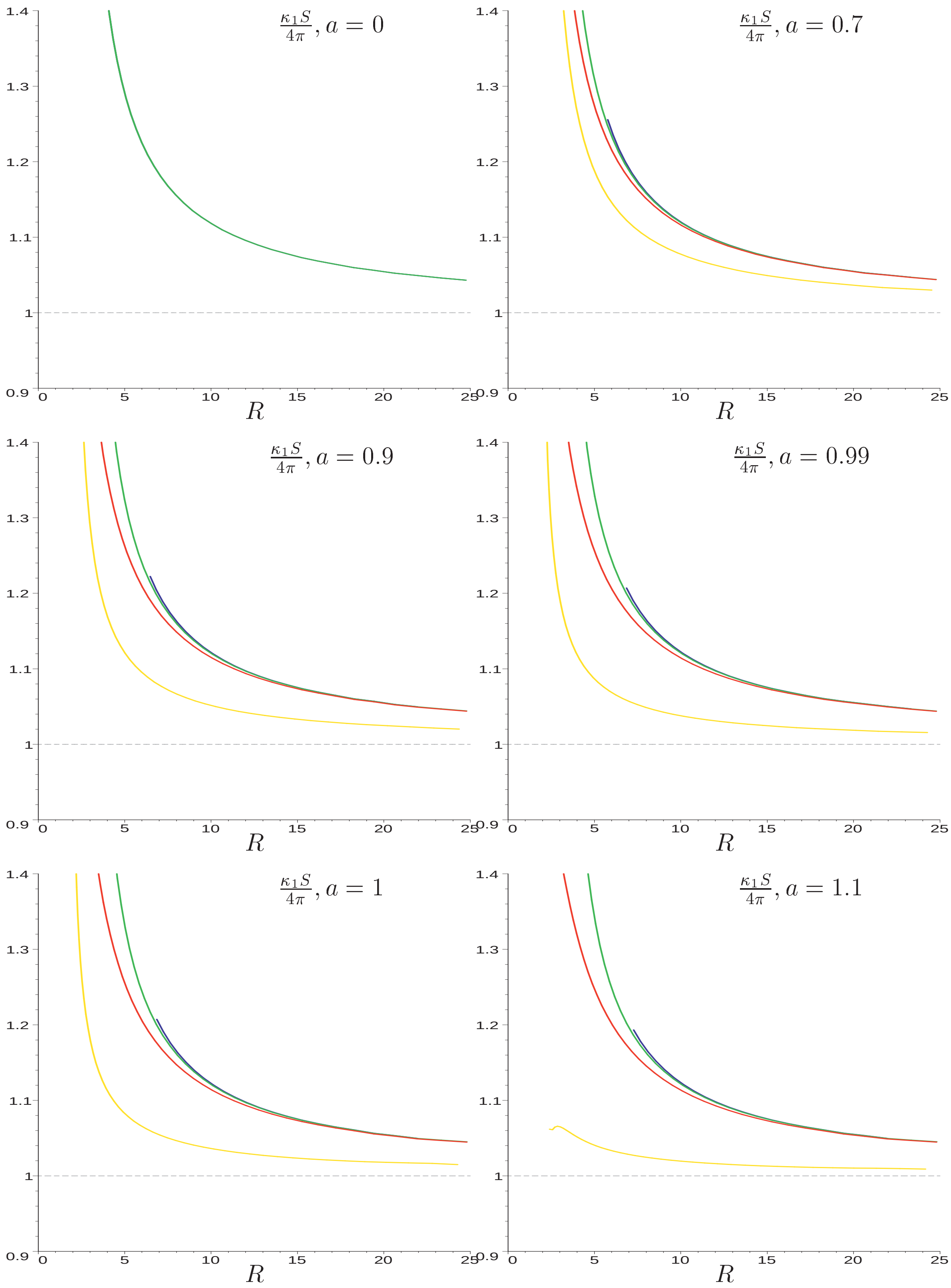
Pro nahé singularity jsou závislosti silně ovlivněny výraznou a často nemonotónní závislostí $r_E(\theta)$. Proto v těchto případech provádíme výpočty pouze pro plochy, které vedou od osy symetrie do ekvatoriální roviny, toroidální plochy kolem singularit a geodetik (stejně jako „ostrůvky" kolem geodetik na ose) vylučujeme. Kromě toho se navíc v případě ploch blízko horizontu nebo singularity může projevit vliv metody řešení problému – kvůli divergenci metrických funkcí se začne zvyšovat chyba numerických výpočtů (ať už při stanovování velikosti 4-zrychlení, nebo při integraci podle (3.12) a (3.13)) (jak je ostatně vidět v grafech pro velká a a malá R).

Poslední zajímavou veličinou je součin $\kappa_1 S$ (průběh v závislosti na R pro různá a je na obr. 3.21. Tato veličina odpovídá toku zrychlení plochou a v klasickém newtonovském případě by byla úměrná pouze hmotnosti M uzavřené v dané ploše (a nezávisela by tedy na R). Opět se ukazuje, že v případě černých děr je tíhové pole „silnější" než v klasickém případě (a v blízkosti nahé singularity závislost opět vykazuje „divoké" chování).

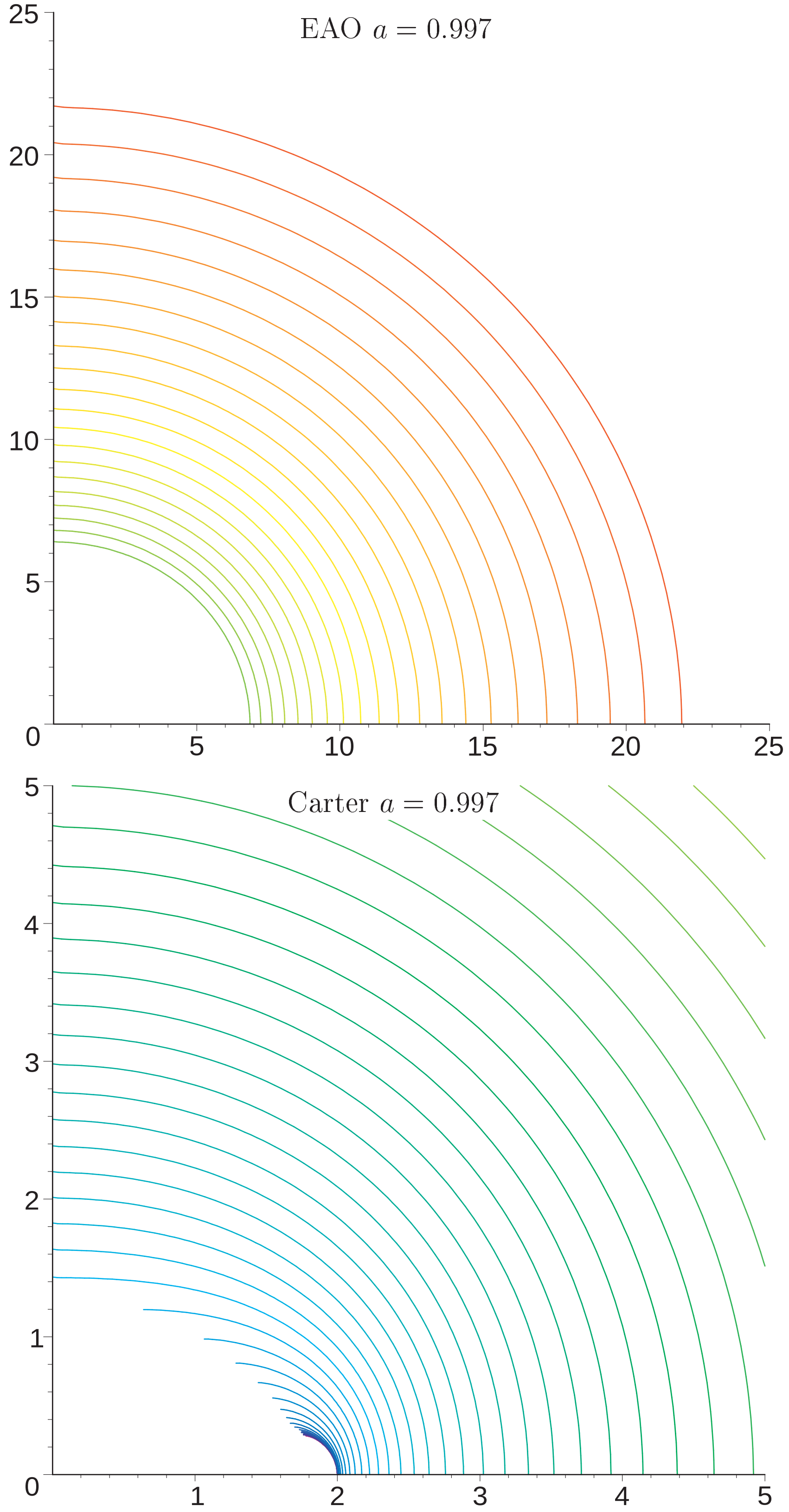
Isometrické znázornění ploch

Když jsme zmiňovali zploštělost ekvipotenciál, šlo pouze o konstatování, že polární obvod je kratší nebo (v případě protáhlých ploch) delší než obvod na rovníku. Na obr. 3.22 a 3.23 jsou isometrická znázornění ekvipotenciál pro rotující černou díru. Horozontální souřadnice odpovídá obvodovému poloměru v daném bodě, a délka křivky odpovídá skutečné (měřené) vzdálenosti od ekvatoriální roviny.

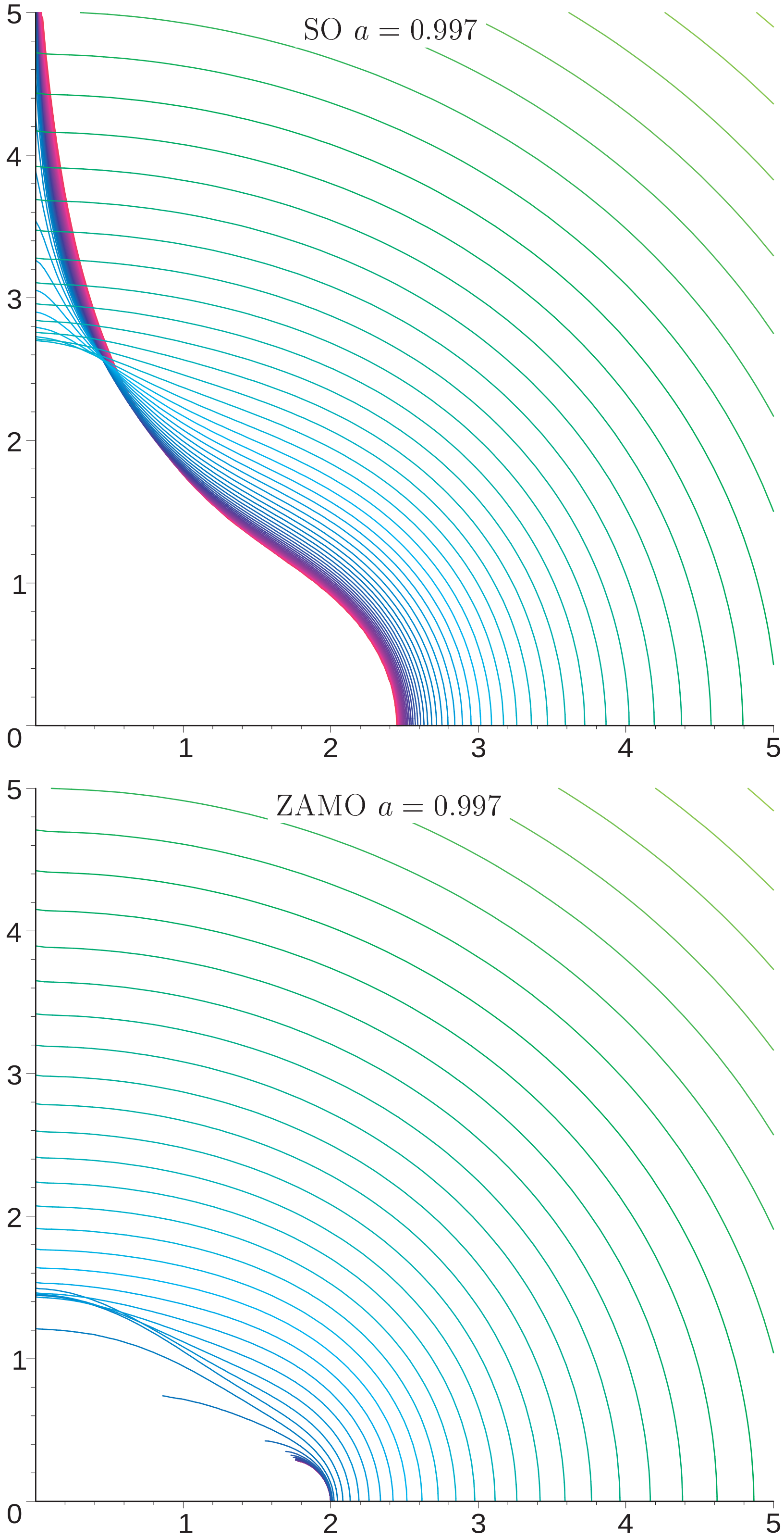
I tato vnoření mají ale omezenou vypovídací hodnotu. Zaprvé, pokud má plocha v nějakém bodě zápornou Gaussovu křivost, nelze ji celou vnořit do euklidovského prostoru (výpočet je ukončen, protože vzdálenosti, které mají být do obrázku vynášeny, se stanou komplexními). Zadruhé, ani v případě, kdy lze celou plochu vnořit do $\mathbb{E}^3$, nepoznáme, zda je vypuklá nebo vydutá.



Obrázek 3.21.: $\frac{S(R)\kappa_1(R)}{4\pi}$ pro $a = 0, 0.7, 0.9, 0.99, 1, 1.1$
Klasickému (newtonovskému) průběhu by odpovídala konstantní hodnota (M, v našem případě tedy 1).



Obrázek 3.22.: Isometrická vnoření ekvipotenciál tíhového pole pro $a = 0.997$ Extremálně urychlený pozorovatel (nahoře) a Carterův pozorovatel (dole). Nedokončené křivky v centrální oblasti znamenají, že za posledním zobrazeným bodem narazil výpočet na zápornou Gaussovu křivost.



Obrázek 3.23.: Isometrická vnoření ekvipotenciál tíhového pole pro $a = 0.997$ Statický pozorovatel (nahoře) a ZAMO (dole).

3.5. Závěr

Numerickými metodami jsme nalezli plochy konstantní velikosti 4-zrychlení κ_1 pro různé kongruence stacionárních pozorovatelů v Kerrově prostoročasu. Pro tyto plochy jsme spočítali některé geometrické charakteristiky.

Statičtí pozorovatelé se zdají být nejméně vhodní pro popis gravitačního pole – neexistují v celé z nekonečna přístupné oblasti prostoročasu a z definice jsou svázáni více s asymptotickým inerciálním systémem než s lokálními fyzikálními vlastnostmi prostoročasu. Tím jsou ovlivněny i tvary jejich ekvipotenciál.

Zajímavé je chování Carterovy kongruence. Ta má totiž jako jediná ekvipotenciály protáhlé ve směru osy symetrie (alespoň pro dostatečně velká r) a jimi měřené pole je tedy silnější podél osy než v ekvatoriální rovině. Rovněž povrchy jejich ekvipotenciál jsou větší než u ostatních zkoumaných pozorovatelů. To je dáno tím, že rotují nejrychleji ze všech uvažovaných pozorovatelů (viz obr. 3.6 – 3.8). Carterovu kongruenci tedy nepovažujeme za vhodné zobecnění newtonovského stojícího pozorovatele.

Pro ZAMO pozorovatele hovoří fakt, že rotují „spolu s prostoročasem“ a volně padající částice se z jejich hlediska pohybují čistě radiálně.

Extremálně urychlení pozorovatelé sice rovněž neexistují v celém prostoročasu (bohužel právě v jeho nejzajímavější části – tedy v blízkosti singularity nebo horizontu), ale jsou definováni na základě měřitelné veličiny a mají přímou fyzikální interpretaci. Navíc při pohybu pociťují tíži ve stále stejném směru (je fixována na gyroskopy, které si s sebou pozorovatel přenáší), což je podstatná vlastnost – už proto, že ji intuitivně považujeme za přirozenou.

Konečně tito pozorovatelé na dané trajektorii pociťují největší zrychlení ze všech zkoumaných kongruencí a rovněž geometrické vlastnosti jimi měřených ekvipotenciál jsou vůči ostatním zkoumaným extremální. To interpretujeme tak, že jejich měření jsou nejméně zatížena vlivem inerciálních sil. Proto je považujeme za nejlepší kandidáty na zobecnění klasického pozorovatele (a tedy i za optimální pro měření gravitačního pole).

Ekvipotenciály gravitačního pole Kerrova řešení jsou zploštělé (to je nejlépe patrné z isometrikcých vnoření na obr. 3.22 a 3.23), v ekvatoriální rovině je pole silnější než na ose symetrie, což odpovídá očekávání (založeném například na tvaru pole newtonovského hmotného prstence). Rovněž to souhlasí s výsledky práce [12], ve které byl zkoumán pád slupky tvořené nekoheretním prachem na

Kerrovu černou díru. Ukázalo se, že v ekvatoriální rovině se částice slupky pohybují rychleji než podél osy. I v tomto smyslu je tedy pole Kerrova prostoročasu silnější v ekvatoriální rovině.

A. Dodatek

Připojený datový disk obsahuje obrázky, z nichž některé jsou použity v tištěné verzi, které vznikly jako vedlejší produkt výpočtů. Některé jsou spojeny do krátkých videosekvencí (formát AVI, kodek XViD), které (doufáme) ilustrují změny některých veličin v závislosti na a a θ.

Výpočty byly provedeny s použitím CAS Maple 8 pomocí vlastních skriptů v jazyce tohoto systému. Jelikož tyto skripty (a doplňkové skripty pro BASH) nejsou příliš komentované nejsou připojeny na datovém disku. Je však možné je na vyžádání obdržet (s velmi stručným vysvětlením funkčnosti).

Metoda výpočtu byla následující:

- Na síti v rovině (r, θ) byla vyhodnocena Ω a poté $\kappa_1(\Omega)$.
- Následně byly nalezeny body odpovídající konkrétní hodotě κ_1, které byly spojeny do křivek.
- Přes tyto křivky pak probíhala standardní numerická integrace.

Literatura

[1] J. R. Oppenheimer, H. Snyder, *Physical Review* **56**, 455 (1939).

[2] J. L. Synge, *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **53**, 83 (1950).

[3] R. P. Kerr, *Physical Review Letters* **11**, 237 (1963).

[4] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman & Comp., San Francisco, 1973.

[5] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space–Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[6] B. Carter, *Physical Review* **174**, 1559 (1968).

[7] O. Semerák, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **308**, 863 (1999).

[8] O. Semerák, *General Relativity and Gravitation* **25**, 1041 (1993).

[9] O. Semerák, *General Relativity and Gravitation* **30**, 1203 (1998).

[10] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[11] O. Semerák, *Astronomy and Astrophysics* **291**, 679 (1994).

[12] J. Bičák, Z. Stuchlík, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **175**, 381 (1976).