

Úloha 3: Kvantový entanglement dvou Q-bitů.

Termín odevzdání: 19. listopadu

Kvantovým bitem (Q-bitem) lze nazvat libovolný systém, který může nabývat dvou stavů; tyto stavy reprezentují čísla 0 a 1 v kvantovém počítači. Stavový prostor takového systému tedy je $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \equiv \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Budeme předpokládat, že jde o dvouhladinový systém, s rozdílem energií ϵ takže Hamiltonián takové tečky je

$$\hat{h} = \epsilon|1\rangle\langle 1|,$$

Q-bit připravený ve stavu $|0\rangle$ nebo $|1\rangle$ tedy v tom stavu zůstává. Dále definujeme operátory

$$\hat{\sigma}_x = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|, \quad \hat{\sigma}_y = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|).$$

Uvažujme nyní dva neinteragující Q-bity se stavovým prostorem $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ a s Hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = \hat{h} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{h}.$$

1. Připravíme systém ve stavu $|\psi\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$, tj. první bit je 1 a druhý 0. Popište jak se bude tento stav vyvíjet v čase. (1 bod)
2. Opět připravíme systém ve stejném stavu $|\psi\rangle$ v čase $t = 0$, ale tentokrát zapneme interakci mezi Q-bity ve tvaru

$$\hat{V} = \hbar\omega (\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_x),$$

takže Hamiltonián je $\hat{H}_0 + \hat{V}$. Po uplynutí doby T interakci vypneme. Jaký bude stav systému $|\psi(T)\rangle$ v okamžiku vypnutí. (6 bodů)

3. Dokažte, že stav $|\psi(T)\rangle$ pro $T = \frac{\pi}{8\omega}$ je entanglovaným stavem. (1 bod)
4. Pro systém ve stavu $|\psi(T)\rangle$ z části 3, popište výsledky měření energie prvního Q-bitu (operátor $\hat{h} \otimes \hat{I}$) a po něm ihned přečteme druhý Q-bit (měřením $\hat{I} \otimes \hat{h}$). Jaké dvojice výsledků a s jakými pravděpodobnostmi můžeme naměřit. (2 body)