

Úloha 5: Moment hybnosti izotropního harmonického oscilátoru

Termín odevzdání: 17. prosince

Izotropní harmonický oscilátor se třemi vibračními stupni volnosti a jeho stacionární stavy lze zkonstruovat z jednorozměrného oscilátoru s hamiltoniánem

$$\hat{h} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right),$$

pomocí diretního součinu $\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_y \otimes \mathcal{H}_z$, tak že hamiltonián je

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z = \hbar\omega \left(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_z + \frac{3}{2} \right),$$

kde

$$\hat{H}_x = \hat{h} \otimes \hat{I} \otimes \hat{I}, \quad \hat{H}_y = \hat{I} \otimes \hat{h} \otimes \hat{I}, \quad \hat{H}_z = \hat{I} \otimes \hat{I} \otimes \hat{h}$$

a kreační operátory

$$\hat{a}_x^\dagger = \hat{a}^\dagger \otimes \hat{I} \otimes \hat{I}, \quad \hat{a}_y^\dagger = \hat{I} \otimes \hat{a}^\dagger \otimes \hat{I}, \quad \hat{a}_z^\dagger = \hat{I} \otimes \hat{I} \otimes \hat{a}^\dagger$$

splňují komutační relace

$$[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}.$$

Stacionární stavy pro tento hamiltonián odpovídající energii $E = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})$ pak zkonstruujeme pomocí kreačních operátorů

$$|n_x, n_y, n_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} (\hat{a}_x^\dagger)^{n_x} (\hat{a}_y^\dagger)^{n_y} (\hat{a}_z^\dagger)^{n_z} |000\rangle$$

ze základního stavu $|000\rangle = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2x_0^2}\right\}$, kde $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

1. Vyjádřete operátory momentu hybnosti \hat{L}_z a \hat{L}_\pm pomocí operátorů \hat{a}_i^\dagger , \hat{a}_i (3 body).
2. Mezi stacionárními stavy s energií $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ najděte vlastní stavy \hat{L}^2 a \hat{L}_z (3 body).
3. Jaké hodnoty \hat{L}^2 a \hat{L}_z a s jakou pravděpodobností můžeme naměřit ve stavu popsaném vlnovou funkcí (4 body)

$$\psi(x, y, z) = xyz \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2x_0^2}\right\}.$$

Poznámka: Části 2 a 3 můžete řešit algebraicky nebo v souřadnicové reprezentaci, cokoli uznáte za pohodlnější. Rovněž se Vám mohou hodit tabulky sférických harmonik či vlastních funkcí oscilátoru ze cvičení.