QM-I-2014

Cvičení 4: Kvantový řetízek.

Úloha 1: Jednoduchý řetízek

V minulých cvičeních jsme se setkali s kvantovými tečkami. Představte si nyní nekonečně dlouhý řetízek rovnoměrně rozmístěných kvantových teček. Částice se může vyskytovat v některé z nich, což popíšeme stavovým prostorem $\mathcal{H} = l^2$, s bází $\{|n\rangle, n \in \mathcal{Z}\}$. Jednoduchý hamiltonián, který respektuje symetrii tohoto systému lze napsat jako

$$H_0 = \sum_n \epsilon_0 |n\rangle\langle n| - t \sum_n \{|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|\}$$

Pro tento systém:

1. Najděte vlastní vektory a vlastní čísla hamiltoniánu $H_0|E\rangle = E|E\rangle$.
2. Najděte správnou normalizační konstantu tak, aby platilo $\langle E|E'\rangle = \delta(E - E')$.
3. Zamyslete se nad tím jaká je přesně množina vlastních vektorů, tj. "kolik" jich je a zda jsou některá vlasní čísla degenerovaná.
4. Ověřte relaci úplnosti $\sum_E |E\rangle\langle E| = I$

Nápověda: vlastní vektory hledejte ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_n e^{ikn}|n\rangle.$$

Úloha 2: Polořetízek

Zamyslete se nad otázkami z předchozího cvičení pro polořetízek, tj. v bázi budou jen vektory $|n\rangle$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Nápověda: Vlnovou funkci lze hledat v podobném tvaru jako v předchozí úloze a odříznutí půlky řetízku lze dosáhnout okrajovou podmínkou $\langle 0|\psi\rangle = 0$.

to je moc
stačí pořádně stihnout
1

Úloha 3: Řetízek s poruchou

Uvažujte stejnou úlohu jako 1, ale s hamiltoniánem

$$H = H_0 + v|0\rangle\langle 0|.$$

Nápověda: Vlnovou funkci hledejte ve stejném tvaru jako v předchozích úlohách. Modifikaci hamiltoniánu lze chápat jako napojování řešení na kvantové tečce $|0\rangle$.

Měření:

Pro úlohy výše:
Jakou hodnotu energie mohu naměřit pro systém připravený ve stavu $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$.
Jaká je střední hodnota energie v tomto stavu?
Jaká je variance ΔE měření energie v tomto stavu?

Pozn: Asi nestihneme všechno. Podle časových možností něco vynecháme.

<u>měření energie:</u>

$$\langle E \rangle = (a^*, b^*) \begin{pmatrix} \epsilon_0 & -t \\ -t & \epsilon_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |a|^2 \epsilon_0 - ab^* t - a^* b t + \epsilon_0 |b|^2$$

tj; $\langle E \rangle = \epsilon_0 - t(ab^* + a^* b) \equiv \epsilon_0 - tA$

<u>variance</u> $(\Delta E)^2 = \langle (E - \bar{E})^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$

$$\begin{pmatrix} tA & -t \\ -t & tA \end{pmatrix}$$

← umocnění rozbalí potřebujeme další elementy

snazší $\langle E^2 \rangle = \langle \phi | \phi \rangle$; $|\phi\rangle = H_0 |\psi\rangle = \epsilon_0 a |0\rangle + \epsilon_0 b |1\rangle$
$- at|1\rangle - bt|0\rangle - at|-1\rangle - bt|2\rangle$

tj $\langle E^2 \rangle = |\epsilon_0 a - bt|^2 + |\epsilon_0 b - at|^2 + |at|^2 + |bt|^2$

$$\epsilon_0^2 + 2t^2 - 2\epsilon_0 t (ab^* + ba^*) + \cancel{} = \epsilon_0^2 + 2t^2 - 2\epsilon_0 t A$$

$\langle E \rangle^2 = (\epsilon_0 - tA)^2 = \epsilon_0^2 + t^2 A^2 - 2\epsilon_0 t A$

tj $\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = 2t^2 - t^2 A^2 = t^2 (2 - A^2) = (\Delta E)^2$

$\boxed{\text{Cvičení 4 - vzorové řešení}}$

$\boxed{1.1}$ $|\psi\rangle = \sum_{n'} \psi_{n'} |n'\rangle = \sum_{n'} e^{ikn'}|n'\rangle$

$$H|\psi\rangle = \sum_n \left[\epsilon_0 e^{ikn} - t\, e^{ik(n+1)} - t e^{ik(n-1)}\right]|n\rangle = E|\psi\rangle$$

$$= \left[\epsilon_0 - t\left(e^{ik}+e^{-ik}\right)\right] \sum_n e^{ikn}|n\rangle \quad \text{tj } E = \epsilon_0 - 2t\cos k$$

$\boxed{1.2}$ normalizace: dvě možnosti:

A - regularizace:

$$\langle E|E'\rangle = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\overbrace{(k'-k)}^{\varkappa}} = (\text{suma geom. posl}) = \frac{e^{-i\varkappa N} - e^{i\varkappa N}\cdot e^{i\varkappa}}{1-e^{i\varkappa}}$$

$$= \frac{e^{-i\varkappa(N+\frac12)} - e^{i\varkappa(N+\frac12)}}{e^{-i\varkappa/2}-e^{i\varkappa/2}} = \frac{2\pi \cdot \frac{\varkappa}{2}}{\sin\frac{\varkappa}{2}} \cdot \frac{\sin\varkappa(N+\frac12)}{\pi\cdot\varkappa} \xrightarrow{N\to\infty} 2\pi\delta(\varkappa)$$

tj správně normované $\delta(E_k - E_{k'}) = \left(\frac{dE}{dk}\right)^{-1}\delta(k-k')$

kde $\frac{dE}{dk} = 2t\sin k \longrightarrow |E\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi t \sin k(E)}} \sum_n e^{ik(E)n}$

B - vzoreček pro δ-hřeben (Dirac)

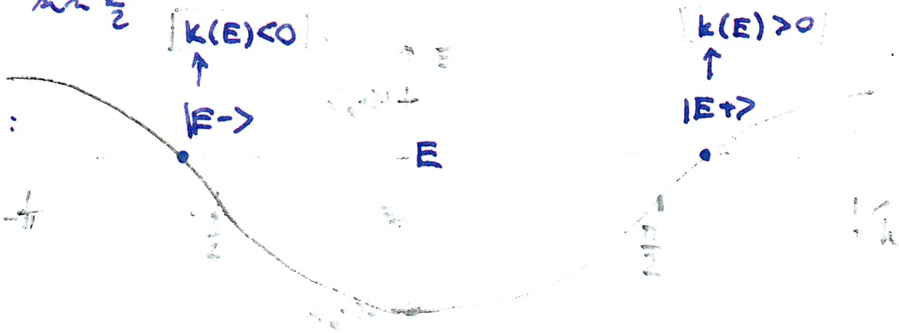
$$\Delta_T(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\delta(t-\ell T) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m t/T}$$

aplikace na $\langle E|E'\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varkappa} = \sum_n e^{2\pi i n \varkappa/2\pi} = 2\pi \sum_\ell \delta(\varkappa - 2\pi\ell)$?

? → dole výše se ~~nap~~ v $\frac{\sin\varkappa(N+\frac12)}{\sin\frac{\varkappa}{2}}$ nepozná záměna $\varkappa \to \varkappa+2\pi$

co je tedy dobře?

$\boxed{1.3}$ degenerace a obor k:



$\forall E \dots \exists!\ k>0$ v int. $\langle 0,\pi\rangle$

dále $-k$ a 2π periodicita.

Přitom však k a $k+2\pi$

odpovídá stejný vektor: $|\psi\rangle = \sum_n e^{ikn}|n\rangle$ ... tj. úplná množina je pro $k\in\langle-\pi,\pi)$

odpověď na nejasnost v [1.2] → v intervalu ↗ je $\delta(\varkappa) = \Delta_T(\varkappa)$

$\boxed{1.4}$ $\int_{\epsilon_0-2t}^{\epsilon_0+2t} dE \left\{|E+\rangle\langle E+| + |E-\rangle\langle E-|\right\} = \int_{-\pi}^{\pi} dk\, |E(k)\rangle\langle E(k)| \cdot \frac{dE}{dk}$

$$= \sum_{nn'} \frac{1}{2\pi}|n\rangle\langle n'| \int_{-\pi}^{\pi} dk\, e^{ik(n-n')} = \sum_{nn'}\frac{1}{2\pi}|n\rangle\langle n'|\, 2\pi\delta_{nn'} = \sum_n |n\rangle\langle n| = I$$

$\boxed{2.1}$ $H_{1/2}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ ~~je pro n~~ napišme tentokrát maticově:

$$\begin{array}{c} n=1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \epsilon_0 & -t & & 0 \\ -t & \epsilon_0 & -t & \\ & -t & \epsilon_0 & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$(\cdot)$ $\epsilon_0\psi_1 - t\psi_2 = E\psi_1$ ... pro $n=1$

$\rightarrow (:)$ $\epsilon_0\psi_n - t(\psi_{n+1}+\psi_{n-1}) = E\psi_n$ pro $n>1$

$(:)$ řeší opět $|\psi^{(+)}\rangle = \sum_n e^{ikn}|n\rangle$ pro $k\in\langle 0,\pi\rangle$

ale i druhé řeš. $|\psi^{(-)}\rangle = \sum_n e^{-ikn}|n\rangle$

$\rightarrow$ obecné řešení $\psi = A\psi^{(+)} + B\psi^{(-)}$ ... $(\cdot)$ splníme pokud $\psi_0 = 0$

tj. $B = -A$

tj. $|\psi\rangle = N\sum_{n=1}^{\infty} \sin kn\,|n\rangle$

$\boxed{2.3}$: nedegenerované $k\in\langle 0,\pi\rangle$

pozn.: vyniš $\pi-k$, $k+\pi$ stejný stav:

$\sin kn \rightarrow \sin(kn+\pi n) = \sin(kn-\pi n) = \sin((k-\pi)n) = -\sin((\pi-k)n)$

$\boxed{2.2}$ Normalizace: $\langle E|E'\rangle =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sin kn\cdot\sin k'n = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{ikn}-e^{-ikn}\right)\left(e^{ik'n}-e^{-ik'n}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{i(k+k')n}+e^{-i(k+k')n}-e^{+i(k-k')n}-e^{-i(k-k')n}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{e^{i(k+k')n}-e^{+i(k-k')n}\right\} \underset{k,k'\in\langle 0,\pi\rangle}{=} -\frac{1}{8\pi}\sum_{l}\left(\delta(k+k'-2\pi l)-\delta(k-k'-2\pi l)\right)$$

$$= +\frac{1}{8\pi}\delta(k-k')$$

$\boxed{3}$ tentokrát se omezíme na diskrétní spektrum

pro $n\neq 1$: $(\cdot)$ $\epsilon_0\psi_n - t(\psi_{n+1}+\psi_{n-1}) = E\psi_n$

$n=1$: $(\cdot\cdot)$ $(\epsilon_0+v)\psi_0 - t(\psi_1+\psi_{-1}) = E\psi_0$

může existovat ℓ^2-řešení: $\psi_n = \sum_n e^{\varkappa n}|n\rangle$ — $\varkappa<0$ pro $n>0$; $\varkappa>0$ $n<0$

kde $\epsilon_0 - t(e^{\varkappa}+e^{-\varkappa}) = \epsilon_0 - 2t\cosh\varkappa = E$ $\leftarrow (\cdot)$

$(\cdot\cdot) \rightarrow$ podm. na E: $\epsilon_0+v-2te^{-\varkappa} = E = \epsilon_0 - 2t\cosh\varkappa$

... řešení ... $\varkappa>0$ splní

$\exists$ pro $v<0$ .. právě jedno

$\rightarrow$ vázaný stav (diskrétní)