

Úloha 3: Kvantový rotor

Termín odevzdání: 22. listopadu

Uvažujte kvantový rotor jako ve cvičení 5, tj. stavový prostor je

$$\mathcal{H} = \left\{ \psi(\varphi); \int_0^{2\pi} |\psi(\varphi)|^2 d\varphi < \infty; \psi(0) = \psi(2\pi) \right\}$$

a na tomto prostoru jsou definovány operátor $\hat{\phi}$ souřadnice φ

$$\hat{\phi} \psi(\varphi) = \varphi \psi(\varphi)$$

operátor \hat{L} momentu hybnosti ℓ

$$\hat{L} = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}$$

a dále operátory $\hat{x} = d \cos(\hat{\phi})$ a $\hat{y} = d \sin(\hat{\phi})$, kde d je kladná konstanta. Definujme ještě navíc zdvihací operátor $\hat{A}^\dagger = \hat{x} + i\hat{y}$ a snižovací operátor $\hat{A} = \hat{x} - i\hat{y}$.

1. Vypočtete komutátory $[\hat{L}, \hat{A}^\dagger]$, $[\hat{L}, \hat{A}]$ (2 body).
2. Ukažte, že pokud $|\psi\rangle$ je vlastní vektor operátoru \hat{L} příslušející vlastnímu číslu ℓ , potom i vektory $\hat{A}^\dagger|\psi\rangle$ a $\hat{A}|\psi\rangle$ jsou vlastními vektory operátoru \hat{L} . Jak se změní vlastní číslo? (2 body).
3. Jaká bude norma vektorů $\hat{A}^\dagger|\psi\rangle$ a $\hat{A}|\psi\rangle$, jestliže stav $|\psi\rangle$ byl normalizován na jedničku (2 body).
4. Napište operátor \hat{y} v bázi vlastních vektorů operátoru \hat{L} (2 body).
5. Nechť je nyní $|\psi_0\rangle$ normalizovaný vektor pro nějž platí $\hat{L}|\psi_0\rangle = 0$. Definujme stav $|\psi\rangle = (\hat{x} - 3i\hat{y})|\psi_0\rangle$. jaká je pravděpodobnost naměřit hodnotu $\ell > 0$ v tomto stavu (2 body).

Nápověda: Úlohu je možno řešit přímo v souřadnicové reprezentaci, nebo si zopakujte práci s komutátory a algebraické řešení kvantového lineárního harmonického oscilátoru a vyjděte z komutační relace pro $[\hat{\phi}, \hat{L}]$.