Cvičení 2: Generátory grupy rotací.

Motivace: Najít explicitně reprezentace rotací výpočtem exponenciály matice generátorů a použít v příkladech.

Úloha 1

Zopakujte si vzorečky pro komutátor $[\sigma_\alpha, \sigma_\beta]$ a antikomutátor $\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\}$ dvou Pauliho matic a najděte druhou mocninu a inverzi Pauliho matice σ_α.

Úloha 2

Najděte operátor $\hat{\mathcal{R}}_x(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\right)$

- Taylorovým rozvojem,
- spektrálním rozkladem,

a pokuste se tento výsledek zobecnit pro rotaci obecným směrem $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Ověřte jak působí tento operátor na stavy $|y : \pm\rangle$, $|z : \pm\rangle$, pokud zvolíme $\phi = \pi/2$ a zjistěte jak se transformují operátory složek spinového momentu hybnosti

$$\hat{s}_\mu \mapsto \hat{\mathcal{R}}_x(\pi/2)\hat{s}_\mu\hat{\mathcal{R}}_x^\dagger(\pi/2).$$

Úloha 3

Ověřte, že rotační matice $R_x(\alpha)$, $R_y(\alpha)$, $R_z(\alpha)$ pro vektory v $\mathbb{R}^3$ lze získat pomocí maticové exponenciály z generátorů:

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Můžete použít opět Taylorův rozvoj nebo výsledek předchozí úlohy a uvědomit si, že funkce blokově diagonální matice lze počítat pro každý blok zvlášť.

Úloha 4

Najděte Wignerovu D-matici $D^{(j)}_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ pro rotaci částice se spinem 1. S jejím použitím transformujte stavy $|{+}\rangle$, $|{\circ}\rangle$, $|{-}\rangle$ odpovídající vlastním hodnotám $\hbar$, 0, $-\hbar$ z-složky spinu $\hat{s}_z$ do vlastních vektorů operátoru $\hat{s}_n$ projekce spinu do směru $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$. Ověřte správnost nalezených vektorů vynásobením maticí operátoru $\hat{s}_n$ v bázi $|{+}\rangle$, $|{\circ}\rangle$, $|{-}\rangle$.