

Cvičení 3: Ireducibilní tenzory a Wignerova-Eckartova věta.

Motivace: Zvyknout si na ireducibilní složky tenzorů a jejich použití.

Komutační relace vektorových operátorů

Nechť \hat{U}_k a \hat{V}_l jsou vektorové operátory, tj. splňují komutační relace $[\hat{J}_k, \hat{V}_l] = i\hbar\epsilon_{klm}\hat{V}_m$ s momentem hybnosti \hat{J}_n .

- Ukažte, že operátor $\hat{S} = \hat{U} \cdot \hat{V}$ je skalár, tj. $[\hat{J}_k, \hat{S}] = 0$.
- Ukažte, že pokud operátor \hat{A} komutuje s \hat{J}_x a \hat{J}_y , musí komutovat s \hat{J}_z .
- Ověřte, že operátory $\hat{V}_0^{(1)} = \hat{V}_z$, $\hat{V}_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{V}_x \pm i\hat{V}_y)$ splňují definiční vztahy ireducibilních komponent tenzorového operátoru.

Tenzorový součin dvou vektorů

Mějme dva vektorové operátory U_k a V_l . Připomeňme, že jejich ireducibilní složky jsou $V_0^{(1)} = V_z$, $V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y)$ a podobně $U_m^{(1)}$. Zopakujte si definici tenzorového součinu dvou operátorů

$$W_m^{(j)} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle U_{m_1}^{(j_1)} V_{m_2}^{(j_2)}.$$

Najděte explicitně komponenty $W_0^{(0)}$, $W_m^{(1)}$, $W_m^{(2)}$ a vyjádřete je pomocí kartézských složek vektorů U_k a V_l . Rozmyslete si jak nalezené operátory $W_m^{(j)}$ souvisí se skalárním a vektorovým součinem U_k a V_l a s tenzorem jejich diadického součinu $T_{kl} = U_k V_l$ a jeho rozkladem na izotropní, antisymetrickou a symetrickou bezestopou část.

Poznámka: Potřebné Clebschovy-Gordanovy koeficienty odečtete ze vzorců pro skládání momentu hybnosti 1+1, které jsme našli ve cvičení 3:

$$\begin{aligned} |22\rangle &= |+\rangle|+\rangle \\ |21\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|0\rangle + |0\rangle|+\rangle) & |11\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|0\rangle - |0\rangle|+\rangle) \\ |20\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(|+\rangle|-\rangle + 2|0\rangle|0\rangle + |-\rangle|+\rangle) & |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle) & |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle|-\rangle - |0\rangle|0\rangle + |-\rangle|+\rangle) \\ |2-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|-\rangle + |-\rangle|0\rangle) & |1-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|-\rangle - |-\rangle|0\rangle) \\ |2-2\rangle &= |+\rangle|+\rangle \end{aligned}$$

Wignerova-Eckartova věta pro skalární operátor

Mějme dvě částice s momenty hybnosti \vec{L}_1 a \vec{L}_2 . Vypočtete maticový element

$$\langle l_1 l_2 LM | \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 | l_1 l_2 L' M' \rangle,$$

kde $|l_1 l_2 LM\rangle$ jsou společné vlastní vektory operátorů \vec{L}_1^2 , \vec{L}_2^2 , \vec{L}^2 a L_z ; přitom $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ je celkový moment hybnosti. Výsledek proveďte s Wignerovou-Eckartovou větou.

Nápověda: K vyčíslení maticového elementu vyjádřete skalární součin $\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$ z $\vec{L}^2 = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2$ pomocí operátorů \vec{L}_1^2 , \vec{L}_2^2 , \vec{L}^2 .

Dipólové přechody v atomu vodíku

Uvažujte maticové elementy

$$\langle nlm|r_i|n'l'm'\rangle,$$

kde $r_i = x, y$ nebo z a $|nlm\rangle$ jsou stacionární stavy atomu vodíku. Zamyslete se nad aplikací Wignerovy-Eckartovy věty na tyto maticové elementy a pro $n = n' = 2$ rozmyslete: a) jaký je počet těchto elementů, b) kolik je jich nenulových, c) kolik integrálů musíte opravdu spočítat (napište je!) a jak z nich dopočtete ostatní. Použijte tabulku C-G koeficientů z minulého cvičení.