Cvičení 4: Nerozlišitelné částice.

Motivace: Symetrizační postulát a jeho důsledky.

Úloha 1: Dvě částice v jámě interagující spinem

Dva identické nerozlišitelné bosony se spinem 1 jsou zachyceny v potenciálové jámě popsané harmonickým potenciálem s vlastní úhlovou frekvencí ω a jejich vzájemná interakce je dána skalárním součinem jejich spinů. Uvažujme tedy hamiltonián systému ve tvaru

$$\hat{H} = \hat{h}^{(1)} + \hat{h}^{(2)} + \frac{\lambda}{\hbar}\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)},$$

kde $\hat{h}^{(1)} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ je hamiltonián pro částici 1 v harmonickém potenciálu a stejný tvar má i $\hat{h}^{(2)}$ ovšem působící na částici 2. Najděte 9 nejnižších energetických hladin určete jejich stupeň degenerace. Předpokládejte, že interakční konstanta $\lambda > 0$ je malá $4\lambda < \omega$. Porovnejte výsledky s případem, kdy by částice byly rozlišitelné, uvědomte si tak, že platnost symetrizačního postulátu je experimentálně ověřitelná.

Poznámky k řešení úlohy:

- Hamiltonián je správným operátorem pro nerozlišitelné částice, tj. komutuje s permutačním operátorem $\hat{P}_{12}$ (ověřte). To znamená, že vlastní stavy lze hledat pro rozlišitelné částice a pak z nich vytřídit jen ty symetrické vůči záměně částic, jak vyžaduje symetrizační postulát pro bosony. Hamiltonián je navíc součtem příspěvků od první částice, druhé částice a spinu, což znamená, že můžeme vlnové funkce hledat v separovaném tvaru $|n_1\rangle_1|n_2\rangle_2|\chi\rangle_s$.
- Vlastní stavy prostorové části jsou přímo součiny oscilátorových stavů $|n_1\rangle_1|n_2\rangle_2$ a příspěvek energie od této části je $\hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$.
- Vlastní stavy spinové části budou současně vlastními stavy celkového spinu $|\chi\rangle_s = |SM\rangle$ a příspěvek k energii je $\lambda\hbar\frac{1}{2}[S(S+1) - 4]$ přitom vlnová funkce pro $S = 0, 2$ je symetrická vůči záměně částic a pro $S = 1$ je antisymetrická (viz cvičení na skládání momentu hybnosti).

$E/\hbar$	n_1,n_2,S	vln.fce rozlišitelné		N_0, N_1, N_2	vln.fce bosony	
$\omega - 2\lambda$	0,0,0	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|00\rangle_s$	(1×)	2,0,0	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|00\rangle_s$	(1×)
$\omega - \lambda$	0,0,1	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|1M\rangle_s$	(3×)	2,0,0		(0×)
$\omega + \lambda$	0,0,2	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|2M\rangle_s$	(5×)	2,0,0	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|2M\rangle_s$	(5×)
$2\omega - 2\lambda$	1, 0, 0 0, 1, 0	$\|1\rangle_1\|0\rangle_2\|00\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|1\rangle_2\|00\rangle_s$	(2×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|1\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|1\rangle_2\right)\|00\rangle_s$	(1×)
$2\omega - \lambda$	1, 0, 1 0, 1, 1	$\|1\rangle_1\|0\rangle_2\|1M\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|1\rangle_2\|1M\rangle_s$	(6×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|1\rangle_1\|0\rangle_2 - \|0\rangle_1\|1\rangle_2\right)\|1M\rangle_s$	(3×)
$2\omega + \lambda$	1, 0, 2 0, 1, 2	$\|1\rangle_1\|0\rangle_2\|2M\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|1\rangle_2\|2M\rangle_s$	(10×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|1\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|1\rangle_2\right)\|2M\rangle_s$	(5×)
$3\omega - 2\lambda$	2, 0, 0 0, 2, 0 1, 1, 0	$\|2\rangle_1\|0\rangle_2\|00\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|2\rangle_2\|00\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|00\rangle_s$	(3×)	1, 0, 1 0, 2, 0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|2\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|2\rangle_2\right)\|00\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|00\rangle_s$	(2×)
$3\omega - \lambda$	2, 0, 1 0, 2, 1 1, 1, 1	$\|2\rangle_1\|0\rangle_2\|1M\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|2\rangle_2\|1M\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|1M\rangle_s$	(9×)	1, 0, 1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|2\rangle_1\|0\rangle_2 - \|0\rangle_1\|2\rangle_2\right)\|1M\rangle_s$	(3×)
$3\omega + \lambda$	2, 0, 2 0, 2, 2 1, 1, 2	$\|2\rangle_1\|0\rangle_2\|2M\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|2\rangle_2\|2M\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|2M\rangle_s$	(15×)	1, 0, 1 0, 2, 0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|2\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|2\rangle_2\right)\|2M\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|2M\rangle_s$	(10×)

V tabulce jsou shrnuty výsledky jak pro případ rozlišitelných částic, tak pro případ nerozlišitelných bosonů.

Úloha 2: Částice na kroužku

Stavový prostor částice tvoří periodické, kvadraticky integrovatelné funkce na intervalu $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Předpokládejme, že hamiltonián tohoto systému je

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}.$$

1. Najděte stacionární stavy částice a příslušné energie.
2. Nyní uvažujte dvě takové navzájem neinteragující částice a opět najděte vlastní stavy a energie v případě, že jsou to nerozlišitelné bosony.
3. Jako předchozí úloha, ale pro fermiony. V obou případech diskutujte první tři energetické hladiny a jejich degeneraci.
4. Ve stacionární poruchové teorii započtěte kontaktní interakci obou částic $U(\phi_1, \phi_2) = \lambda\delta(\phi_1 - \phi_2)$ a to jak v případě bosonů, tak pro fermiony.

Poznámka: Tento systém lze též interpretovat jako rotor s jedním stupňem volnosti, nebo částice v jámě kvantované pomocí periodické okrajové podmínky (Born-vonKarman). U částic neuvažujeme spinové stupně volnosti, můžeme si představit například, že jsou fixovány silným magnetickým polem.

Poznámky k řešení úlohy:

- V případě jediné částice snadno napíšeme rovnou vlnovou funkci stacionárního stavu $|m\rangle = \psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$ s energií $\epsilon_m = \hbar^2 m^2/2\mu R^2 \equiv \epsilon_1 m^2$.
- Pro dvě částice vezmeme prostě součin jednočásticových funkcí $\psi_{m_1}(\phi_1)\psi_{m_2}(\phi_2)$ popřípadě jej symetrizujeme pro bosony nebo antisymetrizujeme pro fermiony. Energie pak je $E = \epsilon_{m_1} + \epsilon_{m_2} = \epsilon_1(m_1^2 + m_2^2)$. Výsledné vlnové funkce jsou přehledně shrnuty v následující tabulce.

Energie	Bosony	Fermiony	Porucha-Bosony
0	$\lvert 0\rangle \lvert 0\rangle$		$\lambda/(2\pi)$
ϵ_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle\lvert 1\rangle + \lvert 1\rangle\lvert 0\rangle)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle\lvert\text{-}1\rangle + \lvert\text{-}1\rangle\lvert 0\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle\lvert 1\rangle - \lvert 1\rangle\lvert 0\rangle)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle\lvert\text{-}1\rangle - \lvert\text{-}1\rangle\lvert 0\rangle)$	$\begin{pmatrix} \lambda/\pi & 0 \\ 0 & \lambda/\pi \end{pmatrix}$
$2\epsilon_1$	$\lvert 1\rangle\lvert 1\rangle$ $\lvert\text{-}1\rangle\lvert\text{-}1\rangle$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 1\rangle\lvert\text{-}1\rangle + \lvert\text{-}1\rangle\lvert 1\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 1\rangle\lvert\text{-}1\rangle - \lvert\text{-}1\rangle\lvert 1\rangle)$	$\begin{pmatrix} \lambda/2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda/2\pi \end{pmatrix}$
$4\epsilon_1$	*nehledáno*	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle\lvert 2\rangle - \lvert 2\rangle\lvert 0\rangle)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle\lvert\text{-}2\rangle - \lvert\text{-}2\rangle\lvert 0\rangle)$	*nehledáno*

V posledním sloupci je ukázán příspěvek prvního řádu poruchové teorie. V případě degenerovaných hladin je uvedena celá matice poruchy, i když matice poruchy je ve všech případech diagonální (rozmyslete, že je to důsledkem toho, že součet kvantových čísel $m_1 + m_2$ je zachovávající se veličinou). Porucha je ukázána jen pro Bosonové vlnové funkce. Zkuste rozmyslet, že pro fermiony je porucha identicky 0 v důsledku Pauliho vylučovacího principu (obě částice nesmí mít stejné ϕ). Výpočet poruchy ukážeme alespoň na příkladu prvního stavu pro druhou hladinu:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\langle 0|\langle 1| + \langle 1|\langle 0|)U(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\phi_1 \int \mathrm{d}\phi_2 [e^{-i\phi_2} + e^{-i\phi_1}]\lambda\delta(\phi_1 - \phi_2)[e^{i\phi_2} + e^{i\phi_1}] \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{\lambda}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\phi_1 2e^{-i\phi_1} 2e^{i\phi_1} = \frac{\lambda}{\pi}.
\end{aligned}$$