Úvod

V tomto dokumentu naleznete zadání a vzorové řešení zápočtové písemky z přednášky "Kvantová mechanika II" za LS 2020/21. Úlohy byly zamýšleny tak, že by je měl být schopen beze zbytku vyřešit každý, kdo absolvoval přednášku a cvičení pokud by měl dost času, ale k vyřešení úloh v časovém limitu (90min) je potřeba ještě trochu tvůrčí invence a porozumění různým souvislostem v látce přednášky.

Na získání zápočtu by vám mělo stačit získat pár bodů, k vykompenzování případných bodových ztrát z domácích úloh. Snažil jsem se úlohy volit tak, aby každý kdo se věnoval hlouběji přípravě a spočítal si předem pár úloh, byl v časovém limitu schopen získat alespoň polovinu bodů z maxima 50 bodů, což (spolu s domácími úlohami) stačí na odpuštění řešení dalších úloh při zkoušce.

V následujícím textu naleznete vzorové řešení. Doporučuji si je pečlivě přečíst pro přípravu ke zkoušce. Pokud to bylo možné, snažil jsem ukázat, nebo alespoň naznačit několik postupů vedoucích k řešení a rovněž poukázat na různé souvislosti.

Úloha 1(10 bodů)
Pomocí variačního principu odhadněte energii základního stavu kvartického oscilátoru s hamiltoniánem
$$\hat{H}\psi(x) = -\tfrac{1}{2}\psi''(x) + \tfrac{1}{2}x^4\psi(x).$$
Jako testovací funkci volte Gaussovu křivku s neznámým exponentem.
Mohou se hodit:
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2a}\sqrt{\tfrac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \tfrac{3}{4a^2}\sqrt{\tfrac{\pi}{a}}.$$

Řešení:

Jde o přímočaré uplatnění variačního principu. Testovací funkci volíme ve shodě se zadáním jako $\psi(x) = \exp(-ax^2)$ a dosadíme ji do funkcionálu energie
$$f(a) = E[\psi(x)] = \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{T+V}{N},$$
kde jsme si rozdělili střední hodnotu hamiltoniánu na kinetickou a potenciální energii. Jednotlivé členy dopočteme s využitím integrálů z nápovědy
$$N = \int |\psi|^2\mathrm{d}x = \int e^{-2ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\tfrac{\pi}{2a}}.$$
Kinetickou energii si nejdříve zjednodušíme integrací per partes
$$T = \tfrac{1}{2}\int \psi(x)^*\psi''(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int |\psi'(x)|^2\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int 4a^2x^2e^{-2ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\tfrac{\pi}{2a}}\tfrac{a}{2}$$
a potenciální energie je
$$V = \tfrac{1}{2}\int x^4|\psi(x)|^2\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int x^4e^{-2ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\tfrac{\pi}{2a}}\tfrac{3}{32a^2}.$$
Výsledný odhad energie tedy najdeme minimalizací funkce
$$f(a) = \frac{T+V}{N} = \frac{a}{2} + \frac{3}{32a^2}.$$
Tato funkce je na intervalu $x \in (0,\infty)$ součtem klesající funkce divergující v 0 a rostoucí lineární funkce, takže má právě jedno absolutní minimum, jehož polohu najdeme derivací
$$2f'(a) = 1 - \frac{3}{8a^3} = 0$$
a tedy $a_0 = \sqrt[3]{3}/2$. Pro tuto hodnotu vyjde tedy nejlepší odhad energie na dané třídě testovacích funkcí
$$E = f(a_0) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{3} \doteq 0.541.$$

Úloha 2(10 bodů)
Dvě částice se spinem 1 jsou připraveny ve stavu s celkovým spinovým momentem hybnosti $\hat{S}^2 \equiv (\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)})^2$ rovným 0. Při měření projekce spinu $\hat{s}_z^{(1)}$ částice 1 na osu z naměříme hodnotu $\hbar$. Jaké hodnoty $\hat{s}_x^{(2)}$ projekce spinu druhé částice na osu x můžeme nyní naměřit?

Řešení:

Nejdříve nalezneme stav $|\psi\rangle$ v němž jsou částice připraveny. Jde o stav s celkovým momentem hybnosti $|JM\rangle$ daným kvantovými čísly $J = M = 0$. Ten nalezneme buď použitím Clebsch-Gordanových koeficientů z taháku, nebo přímou konstrukcí jako na přednášce, nejdříve pro $J = 2$

$$\begin{aligned}
|22\rangle &= |1\rangle|1\rangle, \\
|21\rangle &= [|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle]/\sqrt{2}, \\
|20\rangle &= [|\text{-}1\rangle|1\rangle + 2|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|\text{-}1\rangle]/\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Zde jsme postupovali zhora dolu aplikací posunovacího operátoru $J_- = J_-^{(1)} + J_-^{(1)}$ na vektory separované báze $|m_1\rangle|m_2\rangle$, kde $m_i = 0, \pm 1$. Ortogonalizací k vektoru $|21\rangle$ najdeme $|11\rangle$ a další stavy pro $J = 1$ opět získáme posunovacím operátorem

$$\begin{aligned}
|11\rangle &= [|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle]/\sqrt{2}, \\
|10\rangle &= [|1\rangle|\text{-}1\rangle - |\text{-}1\rangle|1\rangle]/\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Nakonec hledaný vektor $|\psi\rangle = |00\rangle$ je ortogonální k $|20\rangle$ a $|10\rangle$. To jsou vektory úměrné vektorům $(1, 2, 1)$ a $(1, 0, -1)$ takže k nim ortogonální zjevně je $(1, -1, 1)$ (pokud byste to nenahlédli přímo, můžete použít vektorového součinu, nebo obecně determinantů nebo Gramm-Schmidtovou ortogonalizací), takže po normování

$$|\psi\rangle = |00\rangle = [|\text{-}1\rangle|1\rangle - |0\rangle|0\rangle + |1\rangle|\text{-}1\rangle]/\sqrt{3}.$$

Měření složky $s_z^{(1)}$ s nalezením hodnoty $\hbar$ odpovídá působení projekčního operátoru

$$\hat{P}|\psi\rangle = |1\rangle\langle 1| \otimes I|\psi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle| - 1\rangle \qquad \to \text{normování} \to \qquad |1\rangle| - 1\rangle,$$

tj. druhá částice je ve stavu $| - 1\rangle$. Mimochodem někteří řešitelé si všimli, že celý postup výše šel vynechat, protože stačí vědět, že kaplovaný stav $|00\rangle$ je lineární kombinací separovaných stavů $|\text{-}1\rangle|1\rangle$, $|0\rangle|0\rangle$ a $|1\rangle|\text{-}1\rangle$, z nichž měření vybere ten poslední.

Pro následné měření složky $\hat{s}_x^{(2)}$ musíme najít vlastní vektory matice

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{které jsou} \qquad |s_x : 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad |s_x : \pm\hbar\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledné pravděpodobnosti tedy jsou $p_0 = |\langle s_x : 0|\text{-}1\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ pro naměření složky $s_x^{(2)} = 0$ a $p_\pm = |\langle s_x : \pm\hbar|\text{-}1\rangle|^2 = \frac{1}{4}$ pro naměření složek $s_x^{(2)} = \pm\hbar$.

Úloha 3(10 bodů)
Uvažujme dvourozměrný lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\right] + \tfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

a poruchu, kterou lze v okolí počátku aproximovat funkcí $V(x,y) = \lambda(\frac{1}{3}y^3 - yx^2)$. Jaké jsou energie a stacionární stavy pro neporušený případ? Jaká je korekce základního stavu v prvním řádu poruchové teorie? Jako poslední úkol si vyberte, zda spočtěte *a*) korekci základního stavu do druhého řádu poruchové teorie, nebo *b*) korekci prvního řádu všech stavů (na plný počet bodů stačí jedna z možností *a, b*).
Poznámka: v zadání jsem byl trochu nedbalý a nenapsal jsem explicitně, že uvažujeme popis systému v jednotkách v nichž je $m = \hbar = \omega = 1$. Některým z Vás to došlo. Těm, které jsem zmátl se omlouvám, ale na výsledky to nemá zásadní vliv.

Řešení:

Stacionární stavy dvourozměrného harmonického oscilátoru jsou dány součinem $|n_x\rangle|n_y\rangle \equiv |n_x, n_y\rangle$, kde jsme zavedli zkrácenou notaci. Tyto stavy mají energii $E_{n_x,n_y} = n_x + n_y + 1$. Základní stav má energii $E_{00} = 1$ a je nedegenerovaný, takže korekce energie do prvního řádu je

$$\Delta E_{00}^{I} = \langle 00|V|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lambda \int\int e^{-x^2}e^{-y^2}(\tfrac{1}{3}y^3 - yx^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

kde jsme jednak použili vzorečky pro vlastní funkce harmonického oscilátoru z taháku a také jsme si uvědomili, že porucha je lichá funkce v y, zatímco vlnová funkce sudá, takže integrál je nulový.
Řešení části a) vyjdeme ze vzorce pro korekci druhého řádu nedegenerovaného základního stavu

$$\Delta E_{00}^{II} = \sum_{n_x=0}^{\infty}\sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{|\langle n_x n_y|V|00\rangle|^2}{E_{00} - E_{n_x,n_y}} = -\sum_{n_x=0}^{\infty}\sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{|\langle n_x n_y|V|00\rangle|^2}{n_x + n_y}.$$

Všiměte si, že v sumě jsme měli vynechat stav $|00\rangle$, ale já jsem to tam explicitně nenapsal, protože čitatel je v tom případě stejně nula. Nejdříve najdeme působení poruchy na stav $|00\rangle$. Přitom využijeme posunovací operátory $x = (a_x^\dagger + a_x)/\sqrt{2}$, $y = (a_y^\dagger + a_y)/\sqrt{2}$ a jejich známé působení na vlastní stavy harmonického oscilátoru

$$V|00\rangle = \tfrac{\lambda}{3}(y^3 - 3x^2y)|00\rangle = \tfrac{\lambda}{6\sqrt{2}}|0\rangle_x(a_y^\dagger + a_y)^3|0\rangle_y - \tfrac{\lambda}{2\sqrt{2}}(a_x^\dagger + a_x)^2|0\rangle_x(a_y^\dagger + a_y)|0\rangle_y.$$

Při umocňování závorek si musíme uvědomit, že záleží na pořadí operátrů, ale můžeme rovnou vynechat členy, které mají anihilační operátor úplně vpravo, neboť ten vektor $|0\rangle$ vynuluje. Ze stejného důvodu můžeme vynechat členy, v nichž převažuje anihilační operátor nad kreačním (jako například $a_x^2 a_x^\dagger$)

$$\begin{aligned} V|00\rangle &= \tfrac{\lambda}{6\sqrt{2}}|0\rangle_x({a_y^\dagger}^3 + a_y{a_y^\dagger}^2 + a_y^\dagger a_y a_y^\dagger)|0\rangle_y - \tfrac{\lambda}{2\sqrt{2}}({a_x^\dagger}^2 + a_x a_x^\dagger)|0\rangle_x a_y^\dagger|0\rangle_y \\ &= \tfrac{\lambda}{6\sqrt{2}}|0\rangle_x(\sqrt{6}|3\rangle_y + 2|1\rangle_y + |1\rangle_y) - \tfrac{\lambda}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}|2\rangle_y + |0\rangle_x)|1\rangle_y = \tfrac{\lambda}{2\sqrt{3}}|03\rangle - \tfrac{\lambda}{2}|21\rangle. \end{aligned}$$

Takže nenulové budou jen dva členy ve formuli pro korekci energie

$$\Delta E_{00}^{II} = -\frac{|\langle 03|V|00\rangle|^2}{0+3} - \frac{|\langle 21|V|00\rangle|^2}{0+3} = -(\tfrac{\lambda^2}{4.3.3} + \tfrac{\lambda^2}{4.3}) = -\tfrac{\lambda^2}{9}.$$

Řešení části b) Pro tuto část je potřeba si uvědomit, že energie závisí jen na čísle $N = n_x + n_y$. Pro excitované stavy je tedy neporušená energie E_N degenerovaná a korekci energie prvního řádu najdeme diagonalizací matice

$$\langle n_x n_y | V | n'_x n'_y \rangle = \lambda \tfrac{1}{3} \langle n_x | n'_x \rangle \langle n_y | y^3 | n'_y \rangle - \lambda \langle n_x | x^2 | n'_x \rangle \langle n_y | y | n'_y \rangle,$$

kde $n_x + n_y = n'_x + n'_y = N$. Výše uvedené maticové elementy je možné přímo spočíst integrací nebo lépe pomocí kreačních a anihilačních operátorů, ale oba postupy jsou příliš pracné, než aby se dali aplikovat v čase určeném na písemku. Lepší je trochu se zamyslet. Uvědomíme si, že v prvním členu je díky ortogonalitě $\langle n_x | n'_x \rangle = \delta_{n_x, n'_x}$ a tedy $n_x = n'_x$ a tedy také $n_y = N - n_x = N - n'_x = n'_y$. První člen je tedy nula, ze stejných důvodů jako korekce základního stavu (parita). Podobně v druhém členu $\langle n_x | x^2 | n'_x \rangle$ vyžaduje, aby n_x, n'_x měli stejnou paritu a $\langle n_y | y | n'_y \rangle$ vyžaduje, aby n_y, n'_y měly paritu opačnou. To je nekompatibilní s podmínkou $n_x + n_y = n'_x + n'_y$, takže i druhý člen je nula. Korekce prvního řádu jsou tedy dány jako vlastní čísla nulové matice, takže jsou nulové nejen pro základní stav, ale pro všechny stavy.

Úloha 4(10 bodů)
Pomocí Gauntovy formule vyjádřete všechny nenulové maticové elementy $\langle Y_{1m}|xy|Y_{1m'}\rangle$, kde $|Y_{lm}\rangle$ jsou sférické harmoniky ($l=1$) a skalární součin se provádí integrací přes jednotkovou sféru. Pokud chcete můžete výsledek ověřit přímou integrací, ale rád bych viděl, že umíte použít Gautovu formuli a Clebsch-Gordanovy koeficienty, jejichž tabulku přikládám.

Řešení: V taháku si najdeme vzoreček pro sférické harmoniky

$$Y_{2\pm2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}(x\pm iy)^2,\qquad \text{takže}\qquad xy=\sqrt{\frac{32\pi}{15}}(Y_{22}-Y_{2-2})/4i=i\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(Y_{2-2}-Y_{22}).$$

Z výběrových pravidel v Clebsch-Gordanových koeficientech je jasné, že z maticových elementů v $\langle Y_{1m}|xy|Y_{1m'}\rangle$ tedy přežijí jen $\langle Y_{11}|Y_{22}|Y_{1-1}\rangle$ a $\langle Y_{1-1}|Y_{2-2}|Y_{11}\rangle$, které jsou navíc navzájem komplexně sdružené. Takže z Gauntovy formule spočítáme například jen

$$\langle Y_{11}|Y_{22}|Y_{1-1}\rangle=\sqrt{\frac{5.3}{4\pi.3}}\langle 2100|10\rangle\langle 212{-}1|11\rangle=-\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{3}{5}}=-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\frac{3}{5}},$$

kam jsme dosadili z tabulky Clebsch-Gordanových koeficientů v taháku $\langle 2100|10\rangle=-\sqrt{\frac{2}{5}}$ a $\langle 212\text{-}1|11\rangle=\sqrt{\frac{3}{5}}$, takže

$$\langle Y_{11}|xy|Y_{1-1}\rangle=-i\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\langle Y_{11}|Y_{22}|Y_{1-1}\rangle=i\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{i}{5}$$

a tedy

$$\langle Y_{1-1}|xy|Y_{11}\rangle=\langle Y_{11}|xy|Y_{1-1}\rangle^*=-\frac{i}{5}.$$

Pokud by nám zbyl čas mohli bychom pro kontrolu integrál spočíst explicitní integrací, například

$$\begin{aligned}\int Y_{1-1}^*xyY_{11}\mathrm{d}\Omega &= -\frac{3}{8\pi}\int(x+iy)^2xy\mathrm{d}\Omega=-\frac{3}{8\pi}\int\sin^2\theta e^{2i\varphi}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\Omega\\ &= -\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi}(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

V části kde se integruje přes φ přežije jen imaginarní část (reálná část je nula kvůli paritě - integrace liché funkce). Navíc můžeme použít vzorec $\cos\varphi\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin2\varphi$ a integrál $\sin^2$ přes periodu je ze symetrie prostě půlka délky periody (integrál je stejný jako $\cos^2$). Integraci přes θ provedeme snadno substitucí $z=\cos\theta$

$$-\frac{3}{8\pi}\frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{-1}^{1}(1-z^2)^2\mathrm{d}z=-\frac{3i}{16}\left[z-\tfrac{2}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5\right]_{-1}^{1}=-\frac{3i}{16}2\left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\right]=-\frac{3i}{8}\frac{8}{15}=-\frac{i}{5}.$$

Úloha 5(10 bodů)
Soustava elektronů v kvantové dvojtečce má hamiltonián

$$\hat{H} = -t\sum_s (\hat{a}^\dagger_{1s}\hat{a}_{2s} + \hat{a}^\dagger_{2s}\hat{a}_{1s}) + U(\hat{N}_{1+}\hat{N}_{1-} + \hat{N}_{2+}\hat{N}_{2-})$$

kde $t, U > 0$ jsou konstanty, $\hat{a}^\dagger_{ns}$ představuje fermionový operátor který kreuje částici v tečce $|n\rangle$ se z-složkou spinu $s\hbar/2$ a $\hat{N}_{ns} = \hat{a}^\dagger_{ns}\hat{a}_{ns}$ je operátor počtu elektronů v tečce n se spinem s. S použitím antikomutačních relací $\{\hat{a}^\dagger_{ns}, \hat{a}^\dagger_{n's'}\} = \{\hat{a}_{ns}, \hat{a}_{n's'}\} = 0$, $\{\hat{a}_{ns}, \hat{a}^\dagger_{n's'}\} = \delta_{nn'}\delta_{ss'}$ ověřte, že $|\psi\rangle = \hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle$ je vlastním stavem hamiltoniánu a najděte příslušnou energii. Najděte vyjádření posunovacího operátoru $\hat{S}_-$ celkového spinu ve druhém kvantování a aplikujte jej na stav $|\psi\rangle$.

Řešení:

První část provedeme přímou aplikací hamiltoniánu na vlnovou funkci. Přitom si uvědomíme, že příspěvek druhé části hamiltoniánu, úměrný konstantě U je nulový, protože operátory počtu částic ve stavu $|\psi\rangle$ můžeme nahradit jejich vlastními čísly (tj. obsazovacími čísly) $N_{1+} = 1$, $N_{1-} = 0$, $N_{2+} = 1$ $N_{2-} = 0$ a tedy

$$\hat{H}|\psi\rangle = -t\sum_s \left\{\hat{a}^\dagger_{1s}\hat{a}_{2s}\hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle + \hat{a}^\dagger_{2s}\hat{a}_{1s}\hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle\right\}.$$

Nyní se snažíme upravit výraz tak, abychom se zbavili anihilačních operátorů. Jedna možnost je využívat komutačních relací a snažit se prokomutovat anihilační operátor až na vakuum. Tento člen pak dá nulu, ale po cestě nám z komutační relace vygenerují výsledek. Takto dostaneme například v prvním členu

$$\hat{a}^\dagger_{1s}\underbrace{\hat{a}_{2s}\hat{a}^\dagger_{2+}}_{-\hat{a}^\dagger_{2+\hat{a}_{2s}}+\{\hat{a}_{2s},\hat{a}^\dagger_{2+}\}}\hat{a}^\dagger_{1+} = -\hat{a}^\dagger_{1s}\hat{a}^\dagger_{2+}\underbrace{\hat{a}_{2s}\hat{a}^\dagger_{1+}}_{-\hat{a}^\dagger_{1+}\hat{a}_{2s}} + \delta_{s+}\underbrace{\hat{a}^\dagger_{1+}\hat{a}^\dagger_{1+}}_{0} = \hat{a}^\dagger_{1s}\hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}^\dagger_{1+}\hat{a}_{2s}.$$

Podobně zpracujeme druhý člen na $\hat{a}^\dagger_{2s}\hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}^\dagger_{1+}\hat{a}_{1s}$. Takže $\hat{H}|\psi\rangle = 0$. Tím jsme ověřili, že jde skutečně o vlastní stav a to s energií $E = 0$.

V druhé části jsem se ptal na zápis posunovacího operátoru ve druhém kvantování. Je potřeba si uvědomit, že posunovací operátor se získá ze složek x a y spinu a ty jsou pro mnohočásticový systém součtem jednočásticových příspěvků. Takže můžeme přímo použít teorii z přednášky. Stačí najít maticové elementy posunovacího operátoru pro jednu částici

$$\langle ns|\hat{s}_-|n's'\rangle = \langle n|n'\rangle\langle s|\hat{s}_x - i\hat{s}_y|s'\rangle = \tfrac{\hbar}{2}\delta_{nn'}\langle s|\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y|s'\rangle = \hbar\delta_{nn'}\langle s|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|s'\rangle = \hbar\delta_{nn'}\delta_{s-}\delta_{s'+}$$

a ty dosadit do formule pro jednočásticový operátor z přednášky

$$\hat{S}_- = \sum_{nn'}\sum_{ss'}\langle ns|s_-|n's'\rangle\hat{a}^\dagger_{ns}\hat{a}_{n's'} = \hbar\sum_n \hat{a}^\dagger_{n-}\hat{a}_{n+} = \hbar\hat{a}^\dagger_{1-}\hat{a}_{1+} + \hbar\hat{a}^\dagger_{2-}\hat{a}_{2+}.$$

Aplikace na stav $|\psi\rangle$ se pak provede stejným trikem jako aplikace hamiltoniánu, tj. snažíme se prokomutovat anihilační operátory na vakuum

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\hbar}\hat{S}_-|\psi\rangle &= \hat{a}^\dagger_{1-}\underbrace{\hat{a}_{1+}\hat{a}^\dagger_{2+}}_{-\hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}_{1+}}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle + \hat{a}^\dagger_{2-}\underbrace{\hat{a}_{2+}\hat{a}^\dagger_{2+}}_{1-\hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}_{2+}}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle = -\hat{a}^\dagger_{1-}\hat{a}^\dagger_{2+}\underbrace{\hat{a}_{1+}\hat{a}^\dagger_{1+}}_{1-\hat{a}^\dagger_{1+}\hat{a}_{1+}}|0\rangle - \hat{a}^\dagger_{2-}\hat{a}^\dagger_{2+}\underbrace{\hat{a}_{2+}\hat{a}^\dagger_{1+}}_{-\hat{a}^\dagger_{1+}\hat{a}_{2+}}|0\rangle + \hat{a}^\dagger_{2-}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle \\
&= 0 - \hat{a}^\dagger_{1-}\hat{a}^\dagger_{2+}|0\rangle + 0 + \hat{a}^\dagger_{2-}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle = \hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}^\dagger_{1-}|0\rangle + \hat{a}^\dagger_{2-}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle.
\end{aligned}$$

Alternativní řešení v bázi obsazovacích čísel. Místo používání komutačních relací se dají výpočty aplikace hamiltoniánu a operátoru $\hat{S}_-$ na stav $|\psi\rangle$ provádět podle pravidel působení kreačních a anihilačních operátorů na vektory v bázi obsazovacích čísel. Musíme si zvolit pořadí stavů, například $|N_{2-}N_{2+}N_{1-}N_{1+}\rangle_N$. Potom kreační a anihilační operátory vždy působí jen na počty částic ve svém stavu a nesmíme zapomínat na to, že když přeskakují obsazený stav, mění znaménko. Vektor vakua má všechny obsazovací čísla nulová takže $|0\rangle = |0,0,0,0\rangle_N$ a stav $|\psi\rangle = \hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}^\dagger_{1+}|0,0,0,0\rangle_N = |0,1,0,1\rangle_N$. Při vyčíslování působení hamiltoniánu si nejdříve uvědomíme, že v sumě přispěje jen $s = +$ jinak anihilační operátor dá nulu a dále přímo

$$\hat{H}|\psi\rangle = -t\left\{\hat{a}^\dagger_{1+}\hat{a}_{2+}|0,1,0,1\rangle_N + \hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}_{1+}|0,1,0,1\rangle_N\right\} = -t\left\{\hat{a}^\dagger_{1+}|0,0,0,1\rangle_N - \hat{a}^\dagger_{2+}|0,1,0,0\rangle_N\right\} = 0,$$

protože se snažíme kreovat fermion do již obsazeného stavu. Podobně

$$\begin{aligned}\hat{S}_-|0,1,0,1\rangle_N &= \hbar\left\{\hat{a}^\dagger_{1-}\hat{a}_{1+} + \hat{a}^\dagger_{2-}\hat{a}_{2+}\right\}|0,1,0,1\rangle_N = -\hbar\hat{a}^\dagger_{1-}|0,1,0,0\rangle_N + \hbar\hat{a}^\dagger_{2-}|0,0,0,1\rangle_N \\ &= \hbar|0,1,1,0\rangle_N + \hbar|1,0,0,1\rangle_N.\end{aligned}$$

Všiměte si, že délka vektoru, který nám vyšel je $\hbar\sqrt{2}$ ve shodě s tím, že jsme působili na vektor celkového spinu $|SM\rangle = |11\rangle$.