Zápočtová písemka z kvantové teorie II (léto 2025)

čas na řešení: 90min

Letošní písemka se konala v pátek 8. května. V posluchárně T1 bylo odevzdáno 23 řešení z toho 10 s nadpolovičním počtem bodů. Nejlepší výsledek byl 34 bodů, průměrná hodnota 17bodů. Dalších 17 řešení se mi sešlo elektronicky. Zde byl nejlepší výsledek 37 bodů. Z úloh řešených ve standardním čase byla nejúspěšnější 4. úhoha s průměrným ziskem 6.5 bodu. Ostatní úlohy měly všechny průměr v rozmezí 3-4 body. To mě trochu překvapilo, čekal bych, že nejednodušší bude 1. a 3. úloha.

Úloha 1(10 bodů)
Fermion se spinem 1/2 je připraven ve stavu se z-složkou spinu rovnou $\frac{1}{2}\hbar$ a boson se spinem 1 ve stavu se z-složkou spinu rovnou 0. V čase $t = 0$ zapneme interakci $\hat{H} = \frac{2}{\hbar}\omega\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}$. Jaká bude redukovaná matice hustoty pro fermion v čase t? Najděte polarizační vektor $\vec{p}$ pro tuto matici hustoty a určete časy, ve kterých se jedná o matici hustoty čistého stavu.

Řešení: Bázi z vlastních vektorů z-složky spinu pro fermion označíme $\{|\texttt{+}\rangle, |\texttt{-}\rangle\}$ a pro boson $\{|\texttt{1}\rangle, |\texttt{0}\rangle, |\texttt{-1}\rangle\}$. Počáteční stav v čase 0 je v tomto značení $|\psi\rangle = |\texttt{+}\rangle|\texttt{0}\rangle$. Pro nalezení jeho časového vývoje si uvědomíme, že vlastní stavy $|J, M\rangle$ celkového momentu hybnosti $\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)}$ jsou stacionárními stavy s energií

$$E_J = \frac{2}{\hbar}\omega\frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1) - \frac{1}{2}\frac{3}{2} - 1(1+1)\right],$$

speciálně

$$\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\texttt{+}\rangle|\texttt{0}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\texttt{-}\rangle|\texttt{1}\rangle \qquad \text{a} \qquad \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\texttt{+}\rangle|\texttt{0}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\texttt{-}\rangle|\texttt{1}\rangle$$

mají ostré hodnoty energie $E_{3/2} = \hbar\omega$ a $E_{1/2} = -2\hbar\omega$. Odtud vidíme, že časová závislost vlnové funkce bude

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle e^{2i\omega t}$$

tento stav v má po dosazení za stavy $|J, M\rangle$ očividně v čase $t = 0$ správnou počáteční podmínku a časová závislost je

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{3}|\texttt{+}\rangle|\texttt{0}\rangle\left(2e^{-i\omega t} + e^{2i\omega t}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}|\texttt{-}\rangle|\texttt{1}\rangle\left(e^{-i\omega t} - e^{2i\omega t}\right).$$

Redukovaná matice hustory ρ je podle definice daná stopou přes bosonové stupně volnosti

$$\begin{aligned}
\rho &= \langle\texttt{-1}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\texttt{-1}\rangle + \langle\texttt{0}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\texttt{0}\rangle + \langle\texttt{1}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\texttt{1}\rangle \\
&= \frac{1}{9}\left|2e^{-i\omega t} + e^{2i\omega t}\right|^2 |\texttt{+}\rangle\langle\texttt{+}| + \frac{2}{9}\left|e^{-i\omega t} - e^{2i\omega t}\right|^2 |\texttt{-}\rangle\langle\texttt{-}| = p_+|\texttt{+}\rangle\langle\texttt{+}| + p_-|\texttt{-}\rangle\langle\texttt{-}|,
\end{aligned}$$

kde $p_+ = (5 + 4\cos 3\omega t)/9$ a $p_- = (4 - 4\cos 3\omega t)/9$. Tato matice odpovídá čistému stavu jen pokud $\mathrm{Tr}\,\rho^2 = \mathrm{p}_+^2 + \mathrm{p}_-^2 = 1$, což nastane jen pro $\cos 3\omega t = 1$, tj. pro časy, které jsou celočíselnými násobky periody $T = 2\pi/3\omega$. Pro nalezení polarizačního vektoru upravíme matici hustoty do tvaru

$$\rho = \frac{p_+ + p_-}{2}\hat{I} + \frac{p_+ - p_-}{2}\hat{\sigma}_z = \frac{1}{2}(\hat{I} + p_z\hat{\sigma}_z),$$

takže polarizační vektor má nenulovou jen z-složku $p_z = p_+ - p_- = (1 + 8\cos 3\omega t)/9$.

Úloha 2(10 bodů)
Uvažujme izotropní lineární harmonický oscilátor ve 3D s frekvencí ω a hmotností m. Napište, jak na základě Wignerovy-Eckartovy (WE) věty, vypadá matice poruchy $V = \lambda xy$ ve vlastním podprostoru odpovídajícím druhému excitovanému stavu $N = 2$ s energií $E = \hbar\omega\frac{7}{2}$. V tomto podprostoru (dimenze 6) můžete vzít bázi ze stacionárních stavů $|Nlm\rangle$ adaptovanou na sférickou symetrii ($l = 0, 2$, $m = -l, ..., l$). Pro vyjádření celé matice 6×6 matice využijte toho, že

$$\langle 200|xy|222\rangle = ix_0^2/\sqrt{3}, \qquad \langle 220|xy|222\rangle = -ix_0^2/\sqrt{6}$$

Řešení: Z tabulky sférických harmonik vidíme, že $xy = C(Y_{22} - Y_{2-2}) = T_{22} - T_{2-2}$. Hodnota konstanty C není podstatná, důležité je, že analyzovaná porucha je rozdílem dvou složek ireducibilního tenzorového operátoru T_{JM}. Zadaný maticový element lze vyjádřit pomocí WE-věty

$$ix_0^2/\sqrt{3} = \langle 200|xy|222\rangle = -\langle 200|T_{2-2}|222\rangle = -\langle 00|2\text{-}222\rangle(20||T||22)/\sqrt{1},$$

kde si můžeme z tabulky najít hodnotu Clebsch-Gordanova koeficientu $\langle 00|2\text{-}222\rangle = 1/\sqrt{5}$, takže snadno vyjádříme redukovaný element $(20||T||22) = -ix_0^2\sqrt{5}/\sqrt{3}$. Stejný redukovaný element kontroluje též

$$\langle 200|xy|22\text{-}2\rangle = \langle 200|T_{22}|22\text{-}2\rangle = \langle 00|222\text{-}2\rangle(20||T||22) = -ix_0^2/\sqrt{3}.$$

Všechny ostatní maticové elementy $\langle 200|xy|2lm\rangle$ jsou rovny 0, kvůli výběrovým pravidlům pro Clebsch-Gordanovy koeficienty.

Zbývá určit maticové elementy $\langle 22m|xy|22m'\rangle$, kontrolované redukovaným elementem $(22||T||22)$. Ten určíme podobně, jako ten první, ze zadané hodnoty

$$-ix_0^2/\sqrt{6} = \langle 220|xy|222\rangle = -\langle 220|T_{2-2}|222\rangle = -\langle 20|2\text{-}222\rangle\,(22||T||22)/\sqrt{5}$$

s koeficientem $\langle 20|2\text{-}222\rangle = \sqrt{2}/\sqrt{7}$, takže vyjádříme $(22||T||22) = ix_0^2\sqrt{5}\sqrt{7}/(2\sqrt{3})$. S pomocí koeficientů $\langle 22|2220\rangle = \langle 20|222\text{-}2\rangle = \sqrt{2}/\sqrt{7}$ a $\langle 21|222\text{-}1\rangle = \sqrt{3}/\sqrt{7}$ snadno nejdeme zbývající nenulové elementy (ostatní nesplňují $m = m' \pm 2$)

$$\begin{aligned}
\langle 222|xy|220\rangle &= \langle 220|xy|222\rangle^* = \langle 22|2220\rangle(22||T||22)/\sqrt{5} = ix_0^2/\sqrt{6},\\
\langle 221|xy|22\text{-}1\rangle &= \langle 22\text{-}1|xy|221\rangle^* = \langle 21|222\text{-}1\rangle(22||T||22)/\sqrt{5} = ix_0^2/2,\\
\langle 220|xy|22\text{-}2\rangle &= \langle 22\text{-}2|xy|222\rangle^* = \langle 20|222\text{-}2\rangle(22||T||22)/\sqrt{5} = ix_0^2/\sqrt{6},
\end{aligned}$$

tj. celou matici můžeme shrnout zápisem

$$\langle 2lm|xy|2l'm'\rangle = \lambda x_0^2 \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -i/\sqrt{3} \\ -i/\sqrt{3} & 0 & 0 & i/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & -i/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & i/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & -i/2 & 0 & 0 & 0 \\ i/\sqrt{3} & 0 & 0 & -i/\sqrt{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kde pořadí báze je $|2lm\rangle \in \{|200\rangle, |222\rangle, |221\rangle, |220\rangle, |22\text{-}1\rangle, |22\text{-}2\rangle\}$.

Úloha 3(10 bodů)
Do kvantové čtyřtečky s jednočásticovým hamiltoniánem $\hat{H} = -\hbar\omega(\hat{P} + \hat{P}^{\dagger}) \otimes \hat{I}_{spin}$, kde $\omega > 0$ a $\hat{P} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 1|$ vložíme dva elektrony (nerozlišitelné částice se spinem 1/2). Najděte energie všech stacionárních stavů a jejich stupeň degenerace. Řekněme, že tento systém připravíme v prvním excitovaném stavu s celkovým spinem 0. Jaká je pravděpodobnost, že oba elektrony se nacházejí ve stejné kvantové tečce neboli, jaká je střední hodnota dvoučásticového operátoru $\hat{D} = (|11\rangle\langle 11| + |22\rangle\langle 22| + |33\rangle\langle 33| + |44\rangle\langle 44|) \otimes \hat{I}_{spin}$?

Řešení: Jednočásticový hamiltonián je součtem členů v každém z nichž, působí operátor $\hat{H}$ jen na jednu částici. Výsledné stacionární stavy můžeme tedy hledat v separovaném tvaru, jako (správně anti-symetrizovaný) součin jednočásticových stavů a energie budou dány součtem. Prostorovou část vlnové funkce pak vynásobíme příslušnou spinovou částí, na níž energie nezávisí, ale bude mít vliv na celkovou násobnost každé vlastní energie. Prostovová část hamiltoniánu odpovídá matici

$$-\hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

jejíž vlastní vektory zjevně jsou $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, $|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)^T$, $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)^T$, $|\phi_4\rangle = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$ s vlastními hodnotami postupně $-2\hbar\omega$, 0, 0, $2\hbar\omega$. Spinovou část s výhodou zvolíme jako kaplované stavy celkového spinu $|SM\rangle_s$, takže třeba singletní stav $|00\rangle_s = \frac{1}{2}\{|+\rangle|-\rangle - |+\rangle|-\rangle\}$ je antisymetrický při výměně částic a všechny členy tripletu $|1M\rangle_s$ jsou symetrické. Spinovou část tedy nakombinujeme se správně symetrizovanou prostorovou částí, aby výsledek byl antisymetrický. Všechny energie, stavy a stupeň degenerace shrneme v následující tabulce

$E = -4\hbar\omega$	$\|\psi\rangle = \|\phi_1\rangle\|\phi_1\rangle\|00\rangle_s$		$1\times$
$E = -2\hbar\omega$	$\|\psi\rangle = \hat{S}\|\phi_1\rangle\|\phi_2\rangle\|00\rangle_s$, $\|\psi\rangle = \hat{S}\|\phi_1\rangle\|\phi_3\rangle\|00\rangle_s$,	$= \hat{A}\|\phi_1\rangle\|\phi_2\rangle\|1M\rangle_s$, $= \hat{A}\|\phi_1\rangle\|\phi_3\rangle\|1M\rangle_s$	$8\times$
$E = 0$	$\|\psi\rangle = \hat{S}\|\phi_1\rangle\|\phi_4\rangle\|00\rangle_s$, $\|\psi\rangle = \hat{S}\|\phi_2\rangle\|\phi_3\rangle\|00\rangle_s$, $\|\psi\rangle = \|\phi_2\rangle\|\phi_2\rangle\|00\rangle_s$,	$= \hat{A}\|\phi_1\rangle\|\phi_4\rangle\|1M\rangle_s$, $= \hat{A}\|\phi_2\rangle\|\phi_3\rangle\|1M\rangle_s$, $= \|\phi_3\rangle\|\phi_3\rangle\|00\rangle_s$	$10\times$
$E = 2\hbar\omega$	$\|\psi\rangle = \hat{S}\|\phi_2\rangle\|\phi_4\rangle\|00\rangle_s$, $\|\psi\rangle = \hat{S}\|\phi_2\rangle\|\phi_4\rangle\|00\rangle_s$,	$= \hat{A}\|\phi_3\rangle\|\phi_4\rangle\|1M\rangle_s$, $= \hat{A}\|\phi_3\rangle\|\phi_4\rangle\|1M\rangle_s$	$8\times$
$E = 4\hbar\omega$	$\|\psi\rangle = \|\phi_4\rangle\|\phi_4\rangle\|00\rangle_s$		$1\times$

kde $\hat{S}|\phi_k\rangle|\phi_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\phi_k\rangle|\phi_l\rangle + |\phi_l\rangle|\phi_k\rangle\}$ a $\hat{A}|\phi_k\rangle|\phi_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\phi_k\rangle|\phi_l\rangle - |\phi_l\rangle|\phi_k\rangle\}$. Tím jsme splnili první úkol. Popisu stavu z druhého úkolu odpovídá $|\psi\rangle = \hat{S}|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle|00\rangle_s$ nebo $\hat{S}|\phi_1\rangle|\phi_3\rangle|00\rangle_s$. Úkol splníme pro první z nich (můžete si vyzkoušet, že pro druhý dostaneme stejný výsledek, jak naznačuje symetrie úlohy, stejný výsledek tedy vyjde i pro jejich libovolnou lineární kombinaci). Spinovou část budeme ignorovat, jelikož operátor $\hat{D}$ na spinu nezávisí. Vlnovou funkci přepíšeme do původní báze roznásobením vektorů ϕ_1 a ϕ_2

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{4}(2|11\rangle - 2|33\rangle + |12\rangle + |21\rangle - |23\rangle - |32\rangle - |34\rangle - |43\rangle + |14\rangle + |41\rangle).$$

Odtud je zjevné, že ke střední hodnotě operátoru $\hat{D}$ přispějí jen první dva členy a příslušná pravděpodobnost tedy je $p = \left|\frac{2}{4}\right|^2 + \left|\frac{2}{4}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Úloha 4(10 bodů)
Mějme dvě kvantové tečty do nichž můžeme vkládat bosony, takže boson v tečce 1 je popsán stavem $|1\rangle = a_1^\dagger|0\rangle$ a boson v tečce 2 stavem $|2\rangle = a_2^\dagger|0\rangle$. Dále definujeme dvoučásticový hamiltonián $H_0 = -A(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)$ a interakci $V = \frac{B}{2}\left(a_1^{\dagger\,2} a_1^2 + a_2^{\dagger\,2} a_2^2\right)$. Ukažte, že $|\psi_\pm\rangle = C[a_1^\dagger \pm a_2^\dagger]^2|0\rangle$ jsou vlastní stavy H_0 a najděte příslušné energie a normalizační konstantu C. Pro správně normalizované funkce najděte stření hodnotu interakce $\langle\psi_\pm|V|\psi_\pm\rangle$.

Řešení: Asi nejsnadnější je pracovat v bázi obsazovacích čísel. Vezmeme si tedy bázové stavy ve Fockově prostoru z normalizovaných vektorů $|N_1 N_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1!}}(a_1^\dagger)^{N_1}\frac{1}{\sqrt{N_1!}}(a_1^\dagger)^{N_1}|0\rangle$. Pro vytvoření správně normalizovaného vektoru $|\psi_\pm\rangle$ si uvědomíme, že správně normované kreační operátory jsou $a_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger \pm a_2^\dagger)$, takže správně normované je

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}(a_\pm^\dagger)^2|0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_1^\dagger \pm a_2^\dagger)^2|0\rangle,$$

takže správná normalizační konstanta $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ a roznásobením dostaneme

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_1^\dagger a_1^\dagger + a_2^\dagger a_2^\dagger \pm a_1^\dagger a_2^\dagger \pm a_2^\dagger a_1^\dagger)|0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}|20\rangle + \sqrt{2}|02\rangle \pm 2|11\rangle) = \frac{1}{2}(|20\rangle + |02\rangle) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Aplikace Hamiltoniánu je přímočará

$$\begin{aligned}
H_0|\psi_\pm\rangle &= -A(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)\left[\tfrac{1}{2}(|20\rangle + |02\rangle) \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right] \\
&= -A\left[\tfrac{1}{2}(a_2^\dagger a_1|20\rangle + a_1^\dagger a_2|02\rangle) \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}a_1^\dagger a_2|11\rangle \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}a_2^\dagger a_1|11\rangle\right] \\
&= -A\left[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}|11\rangle + \sqrt{2}|11\rangle) \pm |20\rangle \pm |02\rangle\right] \\
&= \mp 2A|\psi_\pm\rangle = E|\psi_\pm\rangle,
\end{aligned}$$

takže energie těchto stavů je $E = \mp 2A$. Pro výpočet střední hodnoty interakce je asi nejlepší využít relace

$$a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 = a_1^\dagger(a_1 a_1^\dagger + [a_1^\dagger, a_1])a_1 = \hat{N}_1^2 - \hat{N}_1,$$

neboli

$$V|\psi_\pm\rangle = \frac{B}{2}(N_1^2 - N_1 + N_2^2 - N_2)|\psi_\pm\rangle = \frac{B}{2}\frac{1}{2}(4-2)(|20\rangle + |02\rangle) \pm \frac{B}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-1+1-1)|11\rangle$$

a konečně

$$\langle\psi_\pm|V|\psi_\pm\rangle = \langle\psi_\pm|\frac{B}{2}(|20\rangle + |02\rangle) = \frac{B}{4} + \frac{B}{4} = \frac{B}{2}.$$