Cvičení 5: Jednoduchý kvantový rotor.

Motivace: Procvičit si práci s operátory popisující pozorovatelné se spojitým spektrem.

Kvantový rotor

Kvantový rotor je modelovým systémem popisujícím rotace objektu kolem fixní osy. Může se jednat například o pohyb částice uvnitř tentého drátku stočeného do kroužku, nebo rotaci tuhého tělesa (třeba molekuly) kolem fixní osy. Předpokládáme, že stav systému je plně určen jednou úhlovou souřadnicí $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. V kvantové mechanice můžeme prostor stavů $\mathcal{H}$ chápat jako formální lineární obal množiny bázových vektorů $|\varphi\rangle$, tj.

$$\mathcal{H} = \mathrm{span}\{|\varphi\rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle\},$$

přesněji můžeme říci, že stav systému je popsán kvadraticky integrovatelnou funkcí $\psi(\varphi)$, přičemž ztotožňujeme krajní body $\psi(0) = \psi(2\pi)$. Skalární součin na tomto prostoru pak přirozeně je

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \psi_1^*(\varphi) \psi_2(\varphi) \mathrm{d}\varphi.$$

Definujme operátor $\hat{\phi}$ odpovídající pozorovatené úhlové souřadnice

$$\hat{\phi}\, \psi(\varphi) = \varphi\, \psi(\varphi).$$

Dále předpokládejme, že rotor je charakterizovaný konstantami d (délka ramene rotace), m (hmotnost) a $I = md^2$ (moment setrvačnosti) a zavedeme operátory $\hat{x} = d\cos(\hat{\phi})$, $\hat{y} = d\sin(\hat{\phi})$, momentu hybnosti

$$\hat{L} = -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$$

energie $\hat{H} = \hat{L}^2/2I$ a parity $\hat{P}\psi(\varphi) = \psi(\varphi + \pi)$.

Úloha 1

Rozmyslete, jak působí operátory $\hat{x}$ a $\hat{y}$ na vlnovou funkci $\psi(\varphi)$. Napište spektrální rozklad operátoru $\hat{\phi}$ a modifukujte jej tak, abyste dostali výraz pro operátory $\hat{x}$ a $\hat{y}$. Jaké je spektrum a (zobecněné) vlasní vektory těchto operátorů?

Úloha 2

Řekněte, které z výše definovaných operátorů $\hat{\phi}$, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{L}$, $\hat{H}$ a $\hat{P}$ jsou kompatibilní. Některé dvojice jsou vidět hned; v případě potřeby vypočtěte příslušný komutátor.

Úloha 3

Zamyslete se nad tím zda operátor $\hat{x}$ sám o sobě tvoří úplný systém komutujících operátorů. Pokud ne, doplňte k němu vhodný operátor (operátory).

Úloha 4

Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru $\hat{L}$. Nezapomeňte vzít v úvahu periodickou okrajovou podmínku. Normujte vlastní vektory tak, aby tvořili ortonormální bázi v $\mathcal{H}$. Nalezněte vzorec pro převod vlnové funkce $\psi(\varphi)$ do reprezentace v této bázi. Nalezněte vyjádření operátorů $\hat{x}$ a $\hat{y}$ v této bázi. Ověřte relaci úplnosti.

Úloha 5

Definujme ještě operátory $\hat{A}^\dagger = \hat{x} + i\hat{y}$ a $\hat{A} = \hat{x} - i\hat{y}$.

- Nalezněte komutační relace $[\hat{L}, \hat{A}^\dagger]$ a $[\hat{L}, \hat{A}]$.
- Ukažte, že pokud $|\psi\rangle$ je vlastní vektor operátoru $\hat{L}$ pak vektory $\hat{A}^\dagger|\psi\rangle$ a $\hat{A}|\psi\rangle$ jsou rovněž jeho vlastními vektory.
- Ukažte, že operátor $\hat{A}^\dagger\hat{A}$ komutuje se všemi dosud zmíněnými operátory.
- Za předpokladu, že vektor $|\psi\rangle$ je normalizovaný, nalezněte normalizační konstantu pro vektory $\hat{A}^\dagger|\psi\rangle$ a $\hat{A}|\psi\rangle$.
- Využijte předchozí výsledky k odvození vyjádření operátorů $\hat{x}$ a $\hat{y}$ v bázi vlastních vektorů operátoru $\hat{L}$.