

Cvičení 7: Lineární harmonický oscilátor.

Úloha 1: závislost výchylky na čase

Mějme lineární harmonický oscilátor s hmotností m a s vlastní úhlovou frekvencí ω připravený ve stavu

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

kde $|n\rangle$ jsou vlastní vektory $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ se standardní fázovou konvencí (tj. $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$).

1. Najděte α, β pro něž je střední hodnota $\langle \hat{X} \rangle$ operátoru polohy maximální.
2. Najděte časovou závislost této veličiny v tomto stavu.
3. Najděte střední hodnotu $\langle \hat{X} \rangle$ ve stavu $|n\rangle$.
4. Najděte varianci ΔX ve stavu $|n\rangle$.

Nápověda: použijte algebraických vlastností kreačních a anihilačních operátorů.

Úloha 2: Hermitovy polynomy

Hermitovy polynomy lze určit pomocí vytvářejícího funkcionálu $S(t, x) = \exp(-t^2 + 2tx)$ pomocí formule

$$S(t, x) = \sum_n \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

1. Najděte tímto způsobem první tři Hermitovy polynomy.
2. Porovnejte nalezený výsledek s rekurentní relací $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$, $H_{-1} = 0$, $H_0 = 1$.
3. Ověřte pomocí vytvářejícího funkcionálu relaci $\int e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$.
4. Najděte explicitně vlnové funkce prvních pár stavů: $\langle x|0\rangle$, $\langle x|1\rangle$, $\langle x|2\rangle$.

Nápověda: Pro nalezení integrálu ve třetím bodě vyšetřujte $I(t, u) = \int \exp(-x^2) S(t, x) S(u, x) dx$.

Úloha 3: p-reprezentace

Jak vypadají vlnové funkce stacionárních stavů LHO $\langle p|n\rangle$ v p-reprezentaci? Oscilátor je připraven ve stavu $|\psi\rangle = |0\rangle + i|1\rangle$. Jaká je pravděpodobnost najít kladnou hybnost?

Úloha 4: Operátor posunutí

1. Ověřte, že operátor $\hat{U}(\alpha) \exp(-\alpha(\hat{a} - \hat{a}^\dagger))$ je unitární.
2. Najděte transformaci $\hat{U} \hat{a} \hat{U}^\dagger$ anihilačního operátoru.
3. Najděte transformaci operátoru $\hat{H} = \hbar\omega[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \lambda(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)]$, kde λ je reálná konstanta.
4. Jaké je spektrum \hat{H} ?