Fyzika pro matematiky — NMFY261 — Elmg. pole

(předběžný text)

J. Obdržálek

ke dni 2018-01-14

Obsah

Rozsah: 1 semestr (2/2 Zk) 2.roč. M 2015-6

Reference

[1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Fundamental physics. John Wiley & Sons, 2008 (8. vyd.).
Čes. překlad: 1. vyd.: FYZIKA, 5 dílů, VÚTIUM, Prometheus 2000, dotisky 2003, 2006;
2. vyd.: FYZIKA, 2 díly, VÚTIUM, 2014.

[2] B. Sedlák, I. Štoll: Elektřina a magnetimus. Academia, Praha 1993

[3] J. Kvasnica: Fyzikální pole. SNTL, Praha 1964

[4] J. Kvasnica: Teorie elektromagnetického pole. Academia, Praha 1985

[5] J. A. Stratton: Teorie elektromagnetického pole. SNTL, Praha 1961 (předl. z angl.)

[6] A. Zangwill: Modern electrodynamics. Cambridge University Press, 2013

[7] Normy:

ČSN ISO/IEC 80000: Fyzikální veličiny a jednotky, ÚNMZ (dřívější: ČSN ISO 31);

ČSN IEC 60050: Mezinárodní elektrotechnický slovník (IEV) – zejména tyto jeho části:

část 112: Veličiny a jednotky

část 113: Fyzika pro elektrotechniku

část 131: Teorie obvodů

[8] ÚNMZ: Grafické značky používané na schématech a výkresech v elektrotechnice podle databáze IEC 60617 DB

[9] Moje webová stránka: http://utf.mff.cuni.cz/ jobdr/

Čtenářům

Velice uvítám všechny připomínky vedoucí ke *zlepšení* textu (spíš než ke zpřesnění, viz kap. 1.1.4, odstavec *Jak*). Napište mi je prosím na adresu

JAN.OBDRZALEK@MFF.CUNI.CZ

Za pečlivé pročtení a několik oprav děkuji posl. Jiřímu Zemanovi a Štěpánu Hudečkovi.
Za zbylé chyby jsem ovšem odpovědný pouze já.

1 Základní přístup

2017−10−26

1.1 Úvodem: pro koho, o čem a jak

1.1.1 Úvodem

Leží před vámi, řekl bych, podpůrný text, zdaleka nekompletní, v němž jsou podrobněji rozvinuty ty partie klasické elektrodynamiky, které dělávají studentům potíže – ať už „technicky“ nebo „ideově“.

Sdělte mi, co vám bylo těžko srozumitelné, a nejlépe z čeho jste příslušné partii nakonec porozuměli. Nejde mi ani o původnost, ani o eleganci, ba ani o vtipnost, ale opravdu jen o to, abych čtenáře dovedl co nejpříjemnější cestou k *pochopení* (nikoli naučení se) *všeho důležitého*, co s elektromagnetickým polem souvisí: pojmy, jejich souvislosti, představy. Příjemná cesta by neměla být ani moc dlouhá, ani moc strmá; tím je občas dáno členění textu.

1.1.2 Pro koho

Tento učební text je určen především posluchačům oboru Matematika na MFF UK po absolvování podobné přednášky z mechaniky a před zkouškou z části zabývající se elektromagnetismem. Může ho však číst (a porozumět mu) každý, kdo:

- z fyziky absolvoval střední školu a setkal se tedy s pojmy elektrické pole, Coulombův zákon, elektrický proud, magnetismus, a to na jakkoli jednoduché úrovni;
- z matematiky má základní znalosti infinitezimálního počtu v rámci obvyklého „kalkulu“, a jinak středoškolské znalosti (trigonometrické funkce, exponenciála).

  Vše další (např. interpretace operátorů grad, div, rot, dále δ-funkce či Fourierova transformace) je uvedeno buď přímo v textu, nebo v Kalkulu pro fyziku, psaném pro tento účel.
  „Kalkul“ je ke stažení na mé webové stránce [9].

1.1.3 O čem

Následující text je jednoduchý úvod do teorie elektromagnetického pole. Je rozšířením ke 3. dílu standardní vysokoškolské učebnice [1], 2. vydání, 2014, zmiňovaném jako HRW. (Číslování z 1. vyd. je v závorkách.)

Koncepčně je hlavní rozdíl v tom, že HRW je zaměřena více prakticky, případně pro techniky. Její výklad je proto ***induktivní*** – vychází z pokusů, a popis je ***integrální*** – HRW např. vychází z *elektrického proudu* I a z něj odvozuje jeho hustotu $\vec{J}$; vychází z *magnetického toku* Φ a z něj odvozuje jeho hustotu $\vec{B}$ apod.

Náš výklad je ***deduktivní*** – vycházíme z Maxwellových rovnic a v ***diferenciálním*** provedení, protože se zaměřujeme spíše směrem *teoretické fyziky.* Primární je proto pro nás hustota $\vec{J}$ elektrického proudu, která se rovná střední hodnotě součinu hustoty ρ náboje a rychlosti $\vec{v}$ jejího nosiče: $\vec{J} = \langle\rho\vec{v}\rangle$; z ní se teprve odvodí celkový proud I jako integrál její normálové složky J_n průřezem vodiče. Podobně je pro nás primární pole magnetické indukce $\vec{B}$, zatímco jeho tok Φ je integrál normálové složky B_n uvažovanou plochou Σ apod.

Maxwellovými rovnicemi (9)-(12) se zde proto zabýváme v ***diferenciálním*** tvaru; z teoretického hlediska jsou jednodušší a srozumitelnější než jejich integrální tvar. Pokračováním tohoto textu může být odvození dalších vlastností a jevů v elektromagnetickém poli z diferenciálního tvaru Maxwellových rovnic: odvození rovnic fyzikální optiky (Fresnelovy vzorce), záření apod.

1.1.4 Jak

Vycházíme z toho, že čtenář bude možná muset později v životě řešit fyzikální úlohy. Něco mu samozřejmě zadavatel poví, ale málo platné, bude mít jiný sloh a lehce jiné představy, než má klasický matematik fyzikou dosud nepostižený. Setká se občas s praktickými otázkami, dílem s otázkami velmi principiálními, ale velmi vágně formulovanými. Dosti podstatnou částí spolupráce s odborníkem jiné profese bývá pochopit, proč a co vlastně potřebuje. Proto je v následujícím textu dost poznámek a vysvětlivek. Občas jsou poznámky mírně odbornější ($\hookleftarrow$), občas populárnější ($\clubsuit$). V textu jsou občas zařazeny se značkou ¿? nezodpovězené otázky a příklady pro čtenáře. (Dovolte mi uvést zlatý citát, kterým mne inspirovala Mgr. Nováčková: „Škoda každého slova, které řekne učitel místo žáka“). Abyste se ale mohli ujistit, že jste na to přišli správně, je na úplně jiné stránce poznámka se značkou ¡! s odpovědí, i s odkazem na stránku s otázkou. Jinými slovy, čtete-li postupně, ***přeskočte*** petity začínající ¡!. (Např. právě nyní:)

¡! Odp. ze str.15: Označme 1 jako druh A. Víme, že se 1-2 přitahují a 3-4 odpuzují. Copak udělají 1-3? Pokud se přitahují, zkusíme 2-3. Přitahují-li se také, jsou 1, 2, 3 druhu A a platí alternativa 1. Pokud se odpuzují, jsou 2, 3 druhu B a platí alternativa 2. A když se 1-3 odpuzují? Zkuste opravdu nejdříve sami, a až pak hledejte na str. 8.

Snažil jsem se, aby se vám příjemně a efektivně studovalo. Volím co nejsnadnější sloh a dávám přednost stručnému, byť i populárnímu či emotivnímu *náznaku* před plnou precisní formulací všude tam, kde by zejména začátečník mohl špatně odhadnout, co je vlastně podstatné v textu.

♣ Precizní formulace často začátečníka zmate a zasvěceného nudí. Mírně pokročilý si ji může sám vytvořit z náznaku („Škoda každého slova, …“, viz výše). S klidem tedy často vynechávám adjektivum „elektrický“. Příležitostně – v úvodním či motivačním textu – nerozlišuji mezi objektem, fyzikální veličinou (tj. vlastností objektu) a její číselnou hodnotou apod. Riskuji sice, že mne kritici budou pokládat za neználka či diletanta v terminologii, ale já už to nějak vydržím[1] – hlavně když čtenář vnikne co nejrychleji a správně do problematiky. Učíme fyziku a nikoli fyzikopis.

1.1.5 Značení

$$\boxed{\textit{Zvlášť důležitá sdělení jsou v rámečku.}}$$

Tučně jsou vysázeny **termíny**, *kurziva* jen *zdůrazňuje* text. Dodržuji naše *normy* [7] (mají stejný statut jako mezinárodní verze); najdete-li v textu odchylku nebo chybu, prosím upozorněte mne.

Používáme standardní značky. Aby vzorce s parciálními derivacemi byly graficky přehlednější, užíváme často následující zkrácený zápis:

$$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t};\ \partial_{tt} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2};\ \partial_r \equiv \frac{\partial}{\partial r};\ \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x};\ \partial_{yz} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\ \text{apod., ale pro } i,\ j,\ k \text{ je } \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\ \text{atd.}$$

Značku ∂ užíváme také pro *hranici množiny*, např. $\partial\Omega$, zejména při zápisu oblasti integrace.

Zavádíme vektorový operátor „nabla“ $\vec{\nabla}$ a užíváme též označení[2]

$$\vec{\nabla} := \Big(\partial_x;\ \partial_y;\ \partial_z\Big) \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} := \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z \tag{2}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{a} := \vec{\nabla}\times\vec{a} = \Big(\partial_y a_z - \partial_z a_x;\quad \partial_z a_x - \partial_x a_z;\quad \partial_x a_y - \partial_y a_x\Big) \tag{3}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} := \vec{\nabla}\quad \text{ve všech ostatních případech:} \tag{4}$$

$$\text{funkce } \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi = \vec{\nabla}\varphi;\qquad \text{operátor } \varphi\,\overrightarrow{\mathbf{grad}} = \varphi\vec{\nabla}\quad \text{apod.} \tag{5}$$

1.2 Základní pojmy: hmota (látka) a pole

V tomto odstavci připomeneme základní pojmy z oblasti, kterou budeme studovat. Jak jsme uvedli už v mechanice, je občas dobré vědět, že objekt (např. nosič náboje, nabité těleso) není totéž co jeho atribut – veličina (např. náboj, hmotnost), i když se to často pro stručnost zaměňuje.

1.2.1 Hmota

Hmota V tomto slově (a ovšem také hmotné prostředí, hmotnost …) slyšíme *hmatat*; hmota je něco, na co si lze sáhnout a poznat i se zavřenýma očima, že „tady to je, tam to končí a dál už to není“. Hmota ve stavu pevné látky nebo kapaliny je dosti ostře vymezena v prostoru: někde je, jinde není. Hmota ve stavu plynu už tak snadno hmatatelná není, ale to nám teď nebude moc vadit: podstatnou vlastností každé hmoty v každém stavu totiž je, že je **substancí** – to znamená, že nemůže vzniknout z ničeho a nemůže zmizet jinak, než že se přemístí někam jinam, nebo že se přemění na jinou formu (opět hmoty). Matematický popis jejího pohybu a „nemizení“ nám dává rovnice kontinuity (např. kap. 4.3). Ta říká, že jestliže v libovolné oblasti někdy ubývá nebo přibývá hmoty, pak jenom tak, že tato hmota v tu dobu proudí přes hranici sledované oblasti.

[1] coby expert v IEC/TC 1 Terminology a předseda IEC/TC 25 Quantities and Units

[2] Obvykle se vektorový charakter vyznačuje tučným typem $\boldsymbol{\nabla}$ a ne už šipkou $\vec{\nabla}$. Zde užívám navíc šipku jen pro zdůraznění. Totéž platí pro vektorové operátory **rot** a **grad**, které zde proto značím $\overrightarrow{\mathbf{rot}}$ a $\overrightarrow{\mathbf{grad}}$.

Látka Termín **hmota** příliš připomíná veličinu hmotnost, a ta bude v elektrodynamice zpravidla nepodstatná[3]. Proto se častěji používá jiný termín, totiž **látka** (látkové prostředí apod.). Znamená totéž co hmota, jenom se jím nezdůrazňuje ona vlastnost – hmotnost. Při studiu elektrických vlastností se nevodiči také často říká **dielektrikum**, při studiu magnetických vlastností **magnetikum** (para-, dia-, fero-,...).

Zdroj pole, náboj Některé hmotné objekty (tělesa) na sebe působí na dálku, např. magnety nebo elektrony. Abychom toto působení popsali, zavedeme pojem **pole** v užším slova smyslu (1.2.2) jakožto prostředníka tohoto působení, a působící těleso v tomto kontextu nazveme **zdrojem** tohoto **pole** (v obou uvedených případech – magnety i elektrony – jde o elektromagnetické pole). Zdrojem elektromagnetického pole je **elektrický náboj**. Speciálním projevem pohybujícího se náboje je **elektrický proud** odpovědný za vznik magnetického pole. Obojí může být i na úrovni molekulární, atomární či subatomární; ***spin*** nabitých částic (kvarků) je zdrojem manetického pole těchto částic.

Objekt – zdroj – se nazývá ***nosič náboje***; termín **náboj** popisuje fyzikální veličinu. (Často se však pro stručnost, srozumitelně, byť nepořádně, nazývá nábojem i nosič sám: „Dva náboje na sebe působí silou...“). **Bodový náboj** však popisuje objekt – trojslovné *bodový nosič náboje* by bylo zbytečně dlouhé. Zdrojem magnetického pole může být i **spin**, aditivní vektorová veličina s charakterem momentu hybnosti, atribut elementárních částic buď nabitých (např. elektron) nebo alespoň složených z nabitých částic (např. neutron jako celek neutrální, ale složený z nabitých kvarků).

Náboj se v úloze může vyskytovat dvojím způsobem:

- explicitně popsaný **volný** coby náboj, který dodáme sami a řídíme jeho pohyby — s výhradou uvedenou u vodičů.
- implicitně popsaný **vázaný** coby náboj těch částic (molekul, atomů, iontů, elektronových oblaků,...), které tvoří látku. *Fenomenologická* teorie Maxwellova ho popíše tím, že zavede **elektrickou polarizaci** $\vec{P}$, **magnetickou polarizaci** $\vec{J}_\mathrm{m}$ (či magnetizaci $\vec{M} = \vec{J}_\mathrm{m}/\mu_0$) a **konduktivitu** (vodivost) σ.
  Vázané náboje mohou být v látce *fixovány* (jádra atomů tvořících látku, pokud se předmět mechanicky nedeformuje), *posunutelné* na mikroskopickou vzdálenost (ty náboje tvořící dielektrikum, jejichž posun se projeví jako polarizace dielektrika, např. vnitřní elektrony) nebo *pohyblivé*, posunutelné na makroskopickou vzdálenost (např. vodivostní elektrony v kovu).

Pohybové rovnice pro zdroje Poloha zdrojů může být dána. Pokud by se měla měnit, pak to bude podle vhodných pohybových rovnice, v našem případě podle Newtonova pohybového zákona síly $m\vec{a} = \sum \vec{F}$. Ten ovšem bude obohacen o členy popisující působení pole na náboj – sílu Coulombovu $\vec{F} = q\vec{E}$ od elektrického pole $\vec{E}$ a sílu Lorentzovu $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ od magnetického pole $\vec{B}$.

1.2.2 Pole

Pole obecně Z *matematického* hlediska popíšeme pole prostě funkcí, jejímž argumentem bude polohový vektor; může ovšem záviset i na dalších proměnných, třeba na čase, na teplotě aj.. Je-li tato funkce skalární (vektorová, tenzorová,...), budeme nazývat i takové pole skalární (vektorové, tenzorové,...). V širším smyslu budeme užívat i ve fyzice termín pole stejně volně jako v matematice, tedy např. pro teplotní pole či tlakové pole.

Pole v užším slova smyslu Toto vymezení pole bude nové; bude jakýmsi protikladem k pojmu látky. Budeme říkat, že někde v prostoru se nachází **pole**, jestliže se tam některé předměty, zvané v tomto kontextu **zdroje** takového pole, budou chovat jinak, než když tam pole není. Toto pole pak zprostředkuje působení mezi dvěma objekty – zdroji. Pole přitom bude, řekli bychom populárně, „všude v prostoru, ale nejvíc kolem svých zdrojů“.

¡ ! Odp. ze str.20: Toto tedy ***nečtěte*** při průběném čtení. Sem se vrátíte až ze str. 20.
Rozviňte potenciál v bodě na ekvipotenciální ploše Taylorovou řadou ve třech souřadnicích.

$$\varphi(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \vec{\nabla}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathcal{O}\left((\mathrm{d}r)^2\right) \qquad ,$$

Na ekvipotenciální ploše $\varphi(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$ je tedy v prvním přiblížení $\vec{\nabla}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, tedy $\vec{\nabla}\varphi$ je kolmý k $\mathrm{d}\vec{r}$ ležícímu na ekvipotenciální ploše.

[3] To samozřejmě platí jen, pokud se nebudeme výslovně zabývat dynamikou pohybu zdrojů pole.

Elektromagnetické pole a jeho zdroje Zdrojem elektromagnetického pole jsou

- *elektrické náboje* (vytvářejí elektrické pole),
- pohybem nábojů vytvořené *elektrické proudy* (vytvářejí magnetické pole),
- částice s nenulovým *spinem* a jím daným magnetickým momentem (vytvářejí magnetické pole). Tento moment souvisí s elektrickým nábojem částice nebo jejích složek.

Dále, elektrické pole vzniká změnou pole magnetického, a magnetické pole vzniká změnou pole elektrického. Obě pole jsou spolu tak úzce spjata, že často mluvíme o poli elektromagnetickém.

♣ Příklad: při studiu elektronu stojícího v inerciální soustavě **S** z této soustavy zjistíme jen pole elektrické (dokonce elektrostatické). Při popisu z jiné inerciální soustavy **S'** pohybující se vůči **S** však tentýž elektron vytváří i pole magnetické, i elektrické.

♣ Přívlastek „elektrický“ (magnetický, elektromagnetický) pro stručnost vynecháme, je-li z kontextu zřejmý[4].

Magnetický náboj neexistuje.

Tím míníme toto (troška filosofie a jazyka fyziky):

- Všechna známá magnetická pole lze vytvořit, jak bylo uvedeno.
- K popisu známých magnetických polí *nepotřebujeme* něco typu magnetického náboje.
- Také nebylo nic jako magnetický náboj („monopól“) dosud v přírodě pozorováno, a to přes velkou snahu experimentátorů.

Nic nám však nebrání zkoumat, jak by se magnetický náboj choval (kdyby existoval), jak by se chovaly jeho pohybem tvořené magnetické proudy apod., případně ho používat jako vědomé zjednodušení v některých situacích („severní a jižní pól“ permanentního magnetu).

Pohybové rovnice pro elektromagnetické pole Pole se samozřejmě mění v prostoru a čase nikoli libovolně, ale řídí se svými pohybovými rovnicemi. V nejobecnějším případě nestacionárního elektromagnetického pole používáme při ***fenomenologickém*** popisu látky **Maxwellovy rovnice** rov. (9)-(12). Jde o soustavu lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, obsahující různé členy s derivacemi podle času; ty v případě jednodušších polí (stacionárních, statických) můžeme vypustit, jak bude ukázáno.

Při ***mikroskopickém*** popisu látku popíšeme jako soustavu elektricky nabitých (elementárních) částic ve vakuu analogickými **Lorentzovými** rovnicemi; z nich dostaneme Maxwellovy rovnice vystředováním.

¡ ! Odp. ze str.6: Pokud se 1-3 odpuzují, zkusíme 2-3. Přitahují-li se, jsou 1, 3 téhož druhu (řekněme A) a platí alternativa 2. Pokud se odpuzují, jsou 1, 2 druhu řekněme A, 3 druhu B a platí alternativa 1. A stejně vím, že jste na to přišli taky, a jen se ujišťujete. A všimli jste si taky, že stačí vlastně jen 3 kuličky?

1.2.3 Co pole je a co není

Laici se často ptají, zda pole opravdu existuje, anebo zda je to jen „jakási umělá konstrukce“ (s pejorativním nádechem). V případné diskusi je dobře si upřesnit pojmy protiotázkou, zda číslo 3 opravdu existuje nebo je to jen jakási umělá konstrukce (tj. zda si je partner vědom významu a nutnosti modelu při poznávání a popisu světa).

(Elektromagnetické) pole je nový fyzikální objekt.

Vlastnosti (elektromagnetického) pole jsou (elektromagnetickými) vlastnostmi prostoročasu.

Elektromagnetické pole ***není substancí.*** Uvažujme např. elektrickou intenzitu $\vec{E}$. Při změně rozložení nábojů se pole všude v prostoru prostě změní taky, a v různých místech prostoru ho „ubylo“ nebo ho „přibylo“. Není ale pravda, že by se jen nějak „přelilo“ z dřívějšího rozložení do nového, jako to dělá voda či vzduch.

[4]Např. s jiným nábojem než elektrickým se ve fyzice nejspíš nesetkáte. „Proud“ by případně mohl být vodní.

Konkrétně: Dva náboje stejné velikosti $q > 0$, ale opačného znaménka (tedy v obvyklém značení $+q$ a $-q$), daleko od sebe, mají každý své pole s intenzitou $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ a potenciálem φ_1, φ_2. Výsledné pole v celém prostoru je podle principu superpozice (str. 17) jejich součtem: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, resp. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Budeme-li náboje přibližovat, bude se výsledné pole měnit: protože potenciály φ obou polí mají opačná znaménka, bude se jejich algebraický součet při přibližování zmenšovat v tom smyslu, že celková energie pole bude ubývat[5]. Pokud sbližování proběhne tak, že náboje zcela splynou, pak výsledné pole $\vec{E}$ bude nulové – pole tedy poctivě „zanikne“. Jeho *energie* se však přelévá do rukou toho, kdo brzdí přitahující se náboje, když se k sobě blíží.

$\hookleftarrow$ Toto *není* model vzniku elektrického dipólu (kap. 2.6.2). Při něm nejen klesá k nule vzdálenost l nábojů, ale také roste do nekonečna jejich velikost q tak, aby se součin ql blížil konečné veličině, momentu p dipólu.

Naproti tomu některé fyzikální veličiny z pole odvozené a s polem spjaté (např. energie pole) se při časovém vývoji zachovávají, a to dokonce nejen integrálně (energie pole jako celku), ale i diferenciálně. Konkrétně, hustota elektrické energie $u_{\mathrm{el}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$ se jakoby „přelévá“ v prostoru a pokud mizí, tak se ve zdrojích pole „mění“ do jejich kinetické či potenciální energie, jako tomu bylo v právě uvedeném příkladě).

♣ Ve volném příměru je pole spíše jako větrem vyvolaná vlna na jezeře. Zavane-li vítr, vlna prostě vznikne „z ničeho“. Sama voda se pohne jen nepatrně nahoru a dolů (jak je vidět na korku plovoucím na hladině), ale vlna přeběhne celé jezero. Vlivem ztrát energie v prostředí (postupnou změnou uspořádaného pohybu na neuspořádaný) časem vlna zanikne beze zbytku.

1.3 Částicový a polní popis

Částice Ze zkušenosti víme, že dvě nabité částice[6] na sebe působí silami: mají-li jejich náboje stejná znamení, částice se odpuzují, mají-li znamení opačná, přitahují se. Toto působení lze popsat kvantitativně Coulombovým zákonem (Charles-Augustin de Coulomb, 1785)

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{R^2}, \qquad \text{resp.} \qquad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{R^2}, \tag{6}$$

kde F je velikost síly působící mezi částicemi, q_i náboj i-té částice a R vzdálenost obou částic; součást konstanty úměrnosti ε je permitivita prostředí mezi nimi (pro vakuum je rovna elektrické konstantě ε_0).

Tato rovnice je (spolu s ostatními) základní součástí „staré“ *elektrodynamiky Ampérovy* pracující jen s částicemi a představující proto **částicový popis**. Všimněte si, že tato rovnice neobsahuje čas; podle ní by tedy náboje na sebe působily bezprostředně a okamžitě na libovolnou vzdálenost. Takové *působení na dálku* (actio in distans) bylo ale těžko přijatelné, ve své době hlavně filosoficky. (Dnes by nám spíše vadilo z hlediska teorie relativity nebo při výkladu záření.)

Pole Michael Faraday, vynikající experimentátor, zavedl pro výklad silového působení model: jakoby mezi náboji byly silové trubice, mající tendenci – podobně jako natažené gumové trubice – se podélně stahovat a v příčných směrech rozšiřovat. Faraday nebyl matematikem (uvádí se, že v jeho poznámkách nebyla jediná rovnice), a tak až James Clerk Maxwell rozšířil Faradayovy představy, doplnil o další jev a vypracoval plně konzistentní matematický popis elektromagnetických jevů ve formě dnes zvané *Maxwellova teorie elektromagnetického pole* – **polní popis**. V ní se zavádí pojem (nehmotného vektorového) *pole*

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_2}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}, \tag{7}$$

nejenom jako „pouhý matematický prostředek“ k popisu interakce mezi (hmotnými) částicemi, ale jako samostatný, plnohodnotný fyzikální objekt – objekt, který se sice na rozdíl od látkového prostředí nechová jako substance, ale má např. svou energii, hybnost atd.. Jeho časový vývoj (*pohyb* v obecném smyslu) je plně popsán soustavou Maxwellových rovnic. Toto pole (vytvořené nábojem q_2 působí na částici s nábojem q_1 silou

$$\vec{F} = q_1 \vec{E} \quad . \tag{8}$$

[5]Energie pole se bude přitom „přelévat“ do energie částic nesoucích tyto náboje – např. tyto (hmotné) nosiče se budou urychlovat nebo budou konat při svém pohybu práci.

[6]Částice nemusí být elementární. Je to jen tělísko tak malé, že jeho vlastní rozměry jsou v úloze zanedbatelné, aby jeho polohu šlo popsat samotným polohovým vektorem. (Tedy jako hmotný bod, jen s tím odstínem, že jeho případná hmotnost není podstatná.)

1.4 Co nás čeká (možná přijde vynechat)

1.4.1 Celkový pohled

Klasická elektrodynamika se zabývá elektromagnetickou interakcí a zejména elektromagnetickým polem, používaným k jejímu (klasickému) popisu. Elektromagnetické pole v látkovém prostředí je fenomenologicky popsáno Maxwellovými rovnicemi.

Vakuum Ve vakuu stačí pro popis elektromagnetického pole jen dvě části:

- **elektrická intenzita** $\vec{E}$;
- **magnetická indukce** $\vec{B}$.

Obě veličiny lze přímo měřit podle jejich účinku na částici s nábojem q a rychlostí $\vec{v}$; působí na ni totiž **Lorentzovou silou** $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, viz dále rov. (20). Tato dvě pole pro popis elektromagnetických jevů ve vakuu plně postačují.

Z rozměrových důvodů (vazba na mechaniku – síla) zavádíme k nim ještě další konstanty (vysvětlíme je podrobně později):

- **elektrická konstanta** $\varepsilon_0 \approx 8,854\,10^{-12}$ F/m (též **permivita vakua**, viz rov. (38));
- **magnetická konstanta** $\mu_0 \approx 1,256\,6{\cdot}10^{-6}$ H/m (též **permeabilita vakua**, viz rov. (164));
- **světelná rychlost**[7] $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ spojuje obě konstanty, a má fyzikální význam i rozměr velikosti rychlosti světla ve vakuu (obecně: velikost rychlosti šíření jakékoli změny v elektromagnetickém poli ve vakuu)

a pro symetrii zápisu zavedeme definitoricky další dvě pole odvozená jednoznačně z předchozích:

- elektrická indukce (ve vakuu) $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$;
- magnetická intenzita (ve vakuu) $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$.

Látkové prostředí popíšeme fenomenologicky třemi makroskopickými veličinami[8] – materiálovými parametry:

- **konduktivita** σ (elektrická vodivost) vystihuje chování volných nábojů tvořících látku (str. 7);
- **elektrická polarizace** $\vec{P}$ vystihuje elektrické důsledky vázaných nábojů tvořících látku;
- **magnetizace** $\vec{M}$ (anebo **magnetická polarizace** $\vec{J}_\mathrm{m} = \mu_0\vec{M}$) vystihuje magnetické důsledky vázaných nábojů tvořících látku a případně spinu částic látky.

Z nich k $\vec{E}$, $\vec{B}$ zkonstruujeme další dvě pole, která umožní symetrický popis. Máme tedy čtyři pole:

- **elektrická intenzita** $\vec{E}$ (jako dříve);
- **elektrická indukce** $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$;
- **magnetická intenzita** $\vec{H} = (\vec{B} - \vec{J})/\mu_0 = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$;
- **magnetická indukce** $\vec{B}$ (jako dříve).

♣ Názvy *magnetických* polí $\vec{H}$, $\vec{B}$ bohužel odpovídají starému pojetí magnetismu s magnetickými náboji. Dnes bychom tyto názvy prohodili, protože máme důvody spojovat spolu na jedné straně $\vec{E}$ a $\vec{B}$, na druhé straně $\vec{D}$ a $\vec{H}$.

V nejjednodušším případě měkkých lineárních látek lze zavést permitivitu ε a permeabilitu μ tak, že $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Ve vakuu $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, konduktivita $\sigma = 0$. Použitelnost Maxwellových rovnic lze rozšířit, připustíme-li, že pro střídavá pole o úhlové frekvenci ω jsou tyto parametry na ní závislé: $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\sigma(\omega)$.

---

[7] Normy ISO a IEC ji značí c_0 a ponechávají samotné c pro rychlost světla v obecném postředí.

[8] Analogická situace byla v mechanice kontinua, kde jsme hmotu popsali spojitě rozloženou hustotou hmotnosti ρ.

1.4.2 Pohybové rovnice pole (Maxwellovy rovnice)

Pohybovými rovnicemi pro elektromagnetické pole jsou ***Maxwellovy rovnice***. V diferenciálním tvaru znějí v úplném tvaru (nalevo pole, napravo jejich zdroje)

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} \quad \text{neboli} \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} \tag{9}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \tag{10}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \tag{11}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{12}$$

Proudová hustota na pravé straně rov. (9) sestává jednak z vtištěného, zvenku vnuceného proudu $\vec{J}_{\mathrm{vt}}$, jednak ze spontánně vznikajícího vodivostního proudu $\sigma\vec{E}$:

$$\vec{J} = \vec{J}_{\mathrm{vt}} + \sigma\vec{E} \quad . \tag{13}$$

Pro úplné řešení potřebujeme ještě zadat okrajové a počáteční podmínky (jde o diferenciální rovnice podle $\vec{r}$ a podle t).

Okrajové podmínky Okrajové podmínky mají tvar analogický Maxwellovým rovnicím. Co se týká reálných zdrojů, lze očekávat nespojitosti v prostoru (látka a zdroje se mění v prostoru nespojitě), nikoli však nespojitosti v čase. Časové derivace v Maxwellových rovnicích se proto neuplatní a zavedeme-li pro skok vektorových složek na rozhraní symboliku

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{v} := v_{\mathrm{t}\,1} - v_{\mathrm{t}\,2} \quad ; \tag{14}$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{v} := v_{\mathrm{n}\,1} - v_{\mathrm{n}\,2} \quad , \tag{15}$$

a značíme-li $\vec{J}_\Sigma$ hustotu plošných proudů a $\vec{\eta}$ hustotu plošných nábojů, mají okrajové podmínky tvar

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{H} = \vec{J}_\Sigma \tag{16}$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{D} = \eta \tag{17}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \tag{18}$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{B} = 0 \tag{19}$$

V často se vyskytující situaci, když nejsou ani plošné proudy (popisující permanentní magnety), ani plošné náboje, je zřejmé, že na rozhraní dvou prostředí se spojitě mění tečné složky elektrické i magnetické intenzity $(E_{\mathrm{t}}, H_{\mathrm{t}})$, a normálové složky elektrické i magnetické indukce $(D_{\mathrm{n}}, B_{\mathrm{n}})$.

Při konkrétním výpočtu v praxi často používáme jednoduššího popisu s elektromagnetickými potenciály φ, $\vec{A}$; ve statickém poli tuto úlohu podrobně rozebírá ***teorie potenciálu*** (konkrétně pro pole daných zdrojů Poissonovu rovnici $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon$ a pro pole beze zdrojů Laplaceovu rovnici $\Delta\varphi = 0$).

Počáteční podmínky předpokládají zadání hodnot všech polí v počátečním čase, kdy začínáme jejich sledování.

1.4.3 Vazba na ostatní fyziku

Síla $\vec{F}$ působící v poli na bodovou částici s nábojem q a rychlostí $\vec{v}$ je rovna

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\,\times\vec{B} \quad ; \tag{20}$$

první člen v součtu nazýváme Coulombovou silou, druhý Lorentzovou silou. Při spojitě rozloženém náboji je ***hustota síly*** $\vec{f}$ působící na náboj rozložený s hustotou ρ rovna

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B} \quad . \tag{21}$$

1.4.4 Další rozvoj teorie elektromagnetického pole

Speciální teorie relativity nevnáší do teorie elektromagnetického pole žádnou změnu ani nový jev: Maxwellovy rovnice pro vakuum a Lorentzovy rovnice jsou už samy relativisticky invariantní.

♣ Čtenář dokonce již nejspíš ví, že naopak studium důsledků teorie elektromagnetického pole (rychlost světla) vedlo k objevu teorie relativity.

Mikroskopický popis podávají **Lorentzovy rovnice**. Ty popisují látku nikoli fenomenologicky (pomocí $\vec{P}$, $\vec{M}$, σ), ale mikroskopicky – látka jako souhrn elementárních částic s jejich náboji, dipóly, proudy a spiny, toto vše ve vakuu. Používá proto jen dvě mikroskopická pole, $\vec{e}$ a $\vec{b}$. Středováním těchto polí a Lorentzových rovnic dojdeme k polím $\vec{E}$, $\vec{B}$ a Maxwellovým rovnicím. Část nábojů a proudů (ta, která popisuje látku) a jimi vytvořená pole $\vec{e}$ a $\vec{b}$ dají středováním ostatní fenomenologická pole ($\vec{D}$, $\vec{H}$, $\vec{P}$, $\vec{M}$).

♣ Proces středování Lorentzových rovnic na Maxwellovy není až tak jednoduchý, ale o tom opravdu až později.

Kvantová elektrodynamika vznikla rozpracováním Lorentzovy teorie kvantovými prostředky (fyzikální veličiny popisující částice a pole jsou popsány vlnovými funkcí a operátory a kvantovány).

1.4.5 Typy polí: pole statické, stacionární a příbuzné pojmy

Elektromagnetické pole je v nejobecnějším případě popsáno uvedenými Maxwellovými rovnicemi (9) až (12). Pokud je však pole buzeno zdroji s časem se neměnícími nebo měnícími se dostatečně „zvolna“, lze právem očekávat že se tyto rovnice nějak zjednoduší a že pak bude jednodušší i jejich řešení. Fyzikální rozbor i jeho matematické vyjádření tak vede k jednodušším typům: pole

- *statické*,
- *kvazistatické*,
- *stacionární*,
- *kvazistacionární*.

Zcela obecné pole budeme v případě potřeby k odlišení nazývat *nestacionární*.

1.4.6 Statické pole (stav)

Představme si elektricky nabitý kruhový disk se středem v počátku vztažné soustavy. Náboj na něm budiž rovnoměrně rozložen s hustotou[9] ρ; ta je tedy konstantní a platí

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \rho_0 \qquad \text{na kruhu o poloměru } R, \\ \rho(\vec{r}) &= 0 \qquad \text{všude jinde.} \end{aligned} \tag{22}$$

Celkový náboj disku je pak $q = \rho\pi R^2$ a tato soustava budí elektrické pole $\vec{E}(\vec{r})$, které je ve větší vzdálenosti podobné poli bodového náboje o velikosti q. Je samozřejmě s časem neproměnné.

Toto je **statický** případ a mluvíme zde o **statickém poli**. Zdroje pole (náboje) nemění v čase své polohy a velikosti ani makroskopicky, ani mikroskopicky; nejsou tedy ani žádné toky ($\vec{J} = \vec{0}$). Čas t se proto nevyskytne ani v jejich popisu, a tím ani v pohybových rovnicích.

Rovnice pro statické pole:

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} = \vec{0} \tag{23}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{24}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \tag{25}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{26}$$

Zřejmě lze oddělit rov. (25), (24) pro $\vec{E}$, $\vec{D}$ od rov. (23), (26) pro $\vec{H}$, $\vec{B}$ a řešit je nezávisle samostatně; jevy elektrické a magnetické spolu ve statickém případě nesouvisejí.

[9] Později bychom upřesnili, že jde o plošnou hustotu. Zde, v předběžné úvaze, formulujeme situaci zcela volně, abychom soustředili pozornost na ty nové pojmy, které zavádíme.

1.4.7 Kvazistatické pole (děj)

Budeme-li v reálné situaci opakovat měření za několik minut, zjistíme patrně, že náboje (díky elektrickému svodu) jaksi ubylo a tím pádem pole příslušně zesláblo. Zatím se nezabývejme, proč, jak a kam se náboj ztratil; zatím jen konstatujme, že jeho hustota ρ s časem klesá, nejspíše exponenciálně $\rho(t) = \rho_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}$ (detailní průběh teď není vůbec podstatný).

V takové situaci si můžeme dovolit zavést *čas jako parametr.* Je-li zdroj $\rho(t)$ závislý na čase, dostaneme jistě i pole $\vec{E}(t)$ stejně závislé (synchronně) na čase. Čas zde zřejmě hraje roli parametru; veličiny popisující zdroje na něm závisejí, ale sám čas se explicite nevyskytne v rovnicích. Zejména se podle něj nederivuje. Takový případ se nazývá **kvazistatický**, jeho výsledkem je **kvazistatické pole**. Řídí se týmiž rov. (23) až (26) jako pole statické. Zřejmě lze i zde oddělit rovnice pro $\vec{E}$, $\vec{D}$ od rovnic pro $\vec{H}$, $\vec{B}$, takže jevy elektrické a magnetické spolu ani v kvazistatickém případě nesouvisejí.

♣ Kvazistatický děj můžu nafilmovat a každé políčko vyšetřovat jako samostatný statický případ.

Kvazistatický zdroj výše uvedený bude tedy popsán vztaky

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r},t) &= \rho_0\,\mathrm{e}^{-\beta t} \qquad \text{na kruhu o poloměru } R, \\ \rho(\vec{r},t) &= 0 \qquad\qquad \text{všude jinde.} \end{aligned} \tag{27}$$

1.4.8 Stacionární pole; tok, elektrický proud (stav)

Představme si nyní, že disk i s jeho náboji roztočíme. Byl-li nabit rovnoměrně, pak uvažte bedlivě, že i nadále bude v každém okamžiku nabit stejně, jako když byl v klidu. Hustota náboje se tedy vůbec nezměnila a je opět popsána rov. (22); mj. opět nezávisí na čase.

♣ Rychle tekoucí čirá řeka bez vlnek je taky stále stejná a nepoznáme, zda řeka stojí či teče, kam a jak rychle.

Přitom je ale zřejmé, že to není tatáž situace jako před tím. Elektrické pole je sice stále stejné jako v elektrostatickém případě předchozím, ale nově zjistíme, že se kolem disku vytvořilo magnetické pole. Disk se chová, jako by byl tvořen smyčkami, kterými protéká **elektrický proud** neboli **tok** nabitých částic. Tato situace se nazývá **stacionární**.

♣ Má-li být analogie s proudem ještě dokonalejší, představme si, že vedle záporného náboje je na disku i stejně hustý náboj kladný, který se však nějakým kouzlem netočí. Elektrická pole obou nábojů se navzájem vyruší a výsledné pole bude nulové. Pevná kladná mříž a v ní proudící záporné náboje dávají realistický model elektrického proudu ve vodiči.

Rovnice pro stacionární pole jsou

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} \tag{28}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \tag{29}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \tag{30}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \tag{31}$$

Zde už je *magnetické* pole $\vec{H}$ vytvářeno *elektrickým* proudem hustoty $\vec{J}$; jiná vazba však není.

Proudová hustota $\vec{J}(\vec{r})$ v místě $\vec{r}$ je střední hodnotou součinu rychlosti $\vec{v}$ nosiče náboje a jeho hustoty ρ v tomto místě: $\vec{J} = \langle \rho\vec{v} \rangle$.

1.4.9 Kvazistacionární pole (děj)

Ve vodivém prostředí je v první Maxwellově rovnici (9) na pravé straně hustota $\vec{J}$ elektrického proudu zahrnující ve vodiči navíc člen $\sigma\vec{E}$, tj. proud tvořený volnými náboji ve vodiči. Pokud můžeme vůči těmto proudům zanedbat druhý člen levé strany $-\partial_t\vec{D}$ (zvaný někdy z historických důvodů hustota **Maxwellova proudu**, někdy příliš přesně **Maxwellova posuvného proudu**), dostáváme prakticky velmi významný mezistupeň — pole *kvazistacionární.* Druhý člen levé strany poslední rovnice (12), tedy $+\partial_t\vec{B}$, však ponecháme (proti nule na pravé straně nechceme zanedbat nic). Tím připouštíme vliv změny magnetického pole na elektrické pole. Rovnice nyní budou znít

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} \tag{32}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \tag{33}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \tag{34}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \tag{35}$$

Toto zjednodušení se zdá nekonzistentní, ale podrobnější rozbor ukáže, že rovnice z těchto plynoucí zůstávají dostatečně symetrické a uvedená úprava Maxwellových rovnic způsobí jen, že veškeré změny zdrojů se projeví ve všech polích *synchronně*, tj. formálně jako by rychlost změn v poli (fakticky: světelná rychlost) byla nekonečná. To ospravedlňuje uvedené zanedbání i v takovém dielektriku, v němž je $\sigma = 0$, a tedy i $\sigma\vec{E} = \vec{0}$.

1.4.10 Nestacionární pole; záření (děj)

Původní rov. (9) až (12), tedy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} - \partial_t\vec{D} &= \vec{J} \\ \operatorname{div}\vec{D} &= \rho \\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} &= \vec{0} \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

představují nejobecnější makroskopicky popsatelný případ. Náboje i proudy se pohybují a mění tak rychle, že se objevují jevy, které bychom na „fotopolíčkách“ nenašli. V elektromagnetismu se to projeví např. tím, že pole už nesleduje poslušně své zdroje, ale má zpoždění dané tím, že změny v poli se šíří nikoli ihned (synchronně), ale jen konečnou rychlostí (a to rychlostí světla v daném prostředí). Pole tedy „nestíhá“. Není určeno *okamžitým* stavem zdrojů, ale stavem zdrojů v dobách minulých. Objevuje se nový jev – **záření**.

$\hookleftarrow$ V detailním rozboru: Pole v místě $\vec{r}$ v okamžiku t závisí na konfiguraci zdrojů v jiném místě $\vec{r'}$ a v jiném, předchozím okamžiku t', kde prostoročasová vzdálenost zdroje $(\vec{r'},t')$ a jeho pole $(\vec{r}, t)$ je právě taková, jakou potřebuje světlo, aby ji překonalo.