Integrand upravíme zavedením hustoty objemových a plošných vázaných nábojů relacemi

$$\rho'_{\text{váz}} := -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}' = -\operatorname{div} \vec{P}' \tag{129}$$

$$\eta'_{\text{váz}} := P'_{\text{n}} = -\operatorname{Div} \vec{P}' \quad , \tag{130}$$

čímž dostaneme

$$4\pi\varepsilon_0\varphi_{\text{váz}} = \int_{\Omega'} \vec{P}' \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \mathrm{d}V' = \int_{\Omega'} -\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}'}{R} \mathrm{d}V' + \int_{\Omega'} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}'}{R}\right) \mathrm{d}V' \tag{131}$$

$$= \int_{\Omega'} -\frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}'}{R} \mathrm{d}V' + \int_{\partial\Omega'} \left(\frac{P'_{\text{n}}}{R}\right) \mathrm{d}V' \tag{132}$$

$$= \int_{\Omega'} \frac{\rho'_{\text{váz}}}{R} \mathrm{d}V' + \int_{\partial\Omega'} \left(\frac{\eta'_{\text{váz}}}{R}\right) \mathrm{d}V' \quad . \tag{133}$$

Tím jsme popsali vnitřní, vázané náboje a můžeme formulovat rovnice pro zbývající, volné náboje. Intenzita $\vec{E}_{\text{váz}}$ buzená vázanými náboji je rovna $\vec{E}_{\text{váz}} = -\vec{\nabla}\varphi_{\text{váz}}$, a dále platí uvnitř Ω'

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} = \rho_{\text{váz}} + \rho_{\text{vol}} = -\operatorname{div} \vec{P} + \rho_{\text{vol}} \quad , \tag{134}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{vol}} \quad . \tag{135}$$

Zavedeme-li veličinu $$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad , \tag{136}$$

dostáváme konečně $$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{vol}} \quad . \tag{137}$$

Elektrická indukce $\vec{D}$ tedy zahrnuje příspěvek vystihující polarizaci $\vec{P}$ látky tak, že divergence $\vec{D}$ dává hustotu už jenom *volných* nábojů. (Ve vakuu byl tento příspěvek pochopitelně nulový.) Gaussův zákon elektrostatiky pak říká toto:

Tok elektrické indukce uzavřenou plochou = celkový volný *náboj uvnitř této plochy:*

$$\Psi = \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \int_{\Omega} \rho \,\mathrm{d}V = q \qquad \text{(Gaussův zákon elektrostatiky)} \tag{138}$$

2.13.2 Elektrická indukce $\vec{D}$ v látce; elektrická polarizace $\vec{P}$

Právě jsme nejobecněji zavedli (rov. (136)) elektrickou indukci:

$$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad . \tag{139}$$

Speciální případy: elektrická polarizace je u mnoha látek (zvaných **měkká dielektrika**) přímo úměrná elektrické intenzitě; koeficient úměrnosti χ se nazývá elektrická **susceptibilita**:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \tag{140}$$

a lze psát

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 + \varepsilon_0\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_{\text{rel}}\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \quad , \tag{141}$$

kde $\varepsilon_{\text{rel}} := 1 + \chi$ se nazývá **relativní permitivita** a $\varepsilon := \varepsilon_0\varepsilon_{\text{rel}}$ **(absolutní) permitivita**. Další jednoduché (a stále ještě lineární) zobecnění je pro anisotropní látky (s nízkou krystalovou symetrií), kde $\vec{E}$ a $\vec{P}$ mají různé směry; pak susceptibilita i obě permitivity jsou tenzory a platí

$$P_j = \sum_k \chi_{jk} E_k \quad . \tag{142}$$

2 Elektrostatika

2019–01–02

Od začátku až do 2.12 včetně se zabýváme jen polem, náboji a vodiči ve vakuu; vliv látkového prostředí (dielektrikum) zahrneme až v 2.13.

2.1 Elektrický náboj – HRW 21 (22);

Elektrický náboj pokládáme za prvotní příčinu všech elektromagnetických jevů. Srov. též kap. 1.2.1.

Porovnáme-li **elektrický** náboj q s **hmotností** m coby zdrojem gravitační interakce, pak zjistíme, že s ním **souhlasí** v těchto vlastnostech:

1. je fyzikální *veličina* (stejně jako m);
2. projevuje se dalekodosahovou[10] *elektromagnetickou interakcí* a měří „mohutnost zdroje" (stejně jako m se projevuje dalekodosahovým gravitačním polem a měří „mohutnost" svého zdroje);
3. je *atributem* (neoddělitelnou vlastností) elementárních částic (stejně jako m);
4. je aditivní; soubor částic má tedy celkový součet rovný součtu nábojů všech částic tvořících soubor (stejně jako m v klasické mechanice);
5. platí pro něj zákon zachování, celkový náboj soustavy se s časem nemění, HRW 21-6 (22.6) (stejně jako m v klasické mechanice).

Naproti tomu se **liší** v těchto vlastnostech:

6. vyskytuje se kladný i záporný (na rozdíl od m);
7. je kvantován, HRW 21-5 (22.5); všechny částice, které známe, mají náboj, který je celistvým násobkem elementárního náboje $e \approx 1,6{\cdot}10^{-19}$ C (m takto jednoduše kvantována není).
   Kvarky mají sice třetinové náboje (u, c, t: $\frac{2}{3}$; d, s, b: $-\frac{1}{3}$), ale částice z nich stvořené už mají náboj jen celistvý (baryony: proton = uud, antiproton = $\bar{\text{u}}\bar{\text{u}}\bar{\text{d}}$, neutron = udd, Λ = usd; mezony: $\pi^+ = \text{u}\bar{\text{d}}$, K = $\text{s}\bar{\text{u}}$, $\text{B}^0 = \text{d}\bar{\text{b}}$, $\eta_{\text{c}} = \text{c}\bar{\text{c}}$;);
8. je relativisticky invariantní (na rozdíl od m).

2.2 Coulombův zákon – HRW 21-4 (22.4)

Dva nosiče náboje na sebe působí silou přímo úměrnou součinu q_1q_2 svých nábojů a nepřímo úměrnou čtverci své vzdálenosti r:

$$F \propto \frac{q_1q_2}{r^2}. \tag{37}$$

Náboje stejného znaménka se odpuzují, náboje různých znamének přitahují. Tento zákon objevil už r. 1785 francouzský fyzik Charles Augustin Coulomb.

¿? Máte kuličky 1, 2, 3, 4. Víte, že 1-2 se přitahují, 3-4 odpuzují. Jsou prý dvojího druhu A, B a jsou dvě možnosti:
1: stejné druhy (tedy A-A nebo B-B) se přitahují (jako hmotnosti) a různé druhy (A-B) se odpuzují;
2: stejné druhy se odpuzují (jako náboje) a různé druhy se přitahují.
Jak poznáte, co je pravda? Odp. je na str.6.

Přesné experimenty (viz [2]) potvrzují platnost Coulombova zákona už od $r > 10^{-15}$ m. Pokud by exponent neměl být přesně -2, ale $-2{\pm}\delta$, pak už z Maxwellových pokusů plynulo, že $\delta < 5{\times}10^{-5}$; současné pokusy dávají $\delta < 6 \times 10^{-17}$ (viz [7]).

Chceme-li Coulombův zákon vyjádřit číselně, musíme zavést jednotky pro náboj a změřit konstantu úměrnosti. V soustavě SI byla zvolena za jednu ze základních jednotek jednotka elektrického proudu, ampér A. Z ní je odvozena jednotka náboje, coulomb, jako náboj q přenesený elektrickým proudem $I = 1\,$A za jednu sekundu: $[q] = 1\,\text{A}{\cdot}\text{s} = 1\,$C, coulomb (viz rov. (174)).

Coulombův zákon pak říká, že pro částice i s polohou $\vec{r}_i$ a nábojem q_i je síla $\vec{F}_{12}$, kterou působí částice 2 na částici 1 ve vakuu, rovna

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1q_2}{R_{12}^2} \vec{R}_{12}^0 \tag{38}$$

[10] Dalekodosahové síly ubývají se vzdáleností polynomiálně ($1/r^n$), zatímco krátkodosahové (např. jaderné) síly ubývají exponenciálně (e^{-r}).

kde $\vec{R}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ je relativní polohový vektor částice 1 od částice 2, $\vec{R}^0_{12}$ je příslušný jednotkový vektor a konstanta ε_0 zvaná **elektrická konstanta** (nebo též **permitivita vakua**) je rovna

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c_0^2}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{s}^4\,\mathrm{A}^2 \approx 8,854\,10^{-12}\,\mathrm{F/m} \quad , \tag{39}$$

kde $c_0 = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ je **světelná rychlost** (rychlost světla ve vakuu). Jednotku F, farad, pro kapacitu zavedeme v kap.3.3.

Přibližnou číselnou hodnotu (hlavně řád!) si pamatujte, to se hodí. Ale tu první jednotku se rozhodně neučte. Kdybyste ji snad někdy potřebovali, tak ji odvodíte jednoduchou rozměrovou úvahou z rozměrů ostatních veličin v rov. (38).

2.3 Elektrická intenzita – HRW 22-2 (23.2)

Částicové pojetí působení nábojů na sebe jsme právě předvedli: dvě nabité částice Q_1, Q_2 s náboji q_1, q_2 na sebe ve vakuu působí (bezprostředně) jistou silou podle rov. (38); tato síla je úměrná součinu nábojů a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti, je centrální a je přitažlivá pro náboje opačných znamének, odpudivá pro náboje se stejnými znaménky.

Polní pojetí téže situace bude následující: Náboj q' v bodě $\vec{r}\,'$ kolem sebe vytváří pole $\vec{E}$ zvané **intenzita elektrického pole** neboli **elektrická intenzita**. Ta má v místě $\vec{r}$ hodnotu

$$\vec{E}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{R^2}\vec{R}^0 \tag{40}$$

kde značíme $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}\,'$ a $\vec{R}^0 = \frac{\vec{R}}{R}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{R}$. Elektrická intenzita $\vec{E}(\vec{r})$ způsobuje, že na náboj o hodnotě q nacházející se v místě $\vec{r}$ působí síla $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$. Připomeňme, že zatím jde o elektrostatiku, tedy o situaci, kdy se s časem nemění ani parametry zdroje (t'), ani pole (t).

2.3.1 Silokřivky (siločáry)

Vektorové pole – zde $\vec{E}$ – často znázorňujeme soustavou **silokřivek** (hovorově **siločar**), tedy křivek popisujících toto pole

- vždy co do směru tím, že tečna k silokřivce udává směr pole;
- někdy i co do velikosti; tu naznačíme tím, že velikost pole v daném bodě je úměrná počtu silokřivek v jeho okolí.

Má-li diferenciální tečný vektor k silokřivce v daném bodě $\vec{r}$ složky $\mathrm{d}\vec{r} \equiv (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, pak rovnoběžnost s $\vec{E}$ zapíšeme pomocí skalární veličiny λ (s potřebným rozměrem) jako

$$\vec{E} = \lambda\mathrm{d}\vec{r} \quad , \tag{41}$$

odkud rozpisem do složek a eliminací λ dostaneme

$$E_y\mathrm{d}z - E_z\mathrm{d}y = 0 \tag{42}$$
$$E_z\mathrm{d}x - E_x\mathrm{d}z = 0 \tag{43}$$
$$E_x\mathrm{d}y - E_y\mathrm{d}x = 0 \tag{44}$$

kde samozřejmě každá ze tří složek $\vec{E}$ je obecně funkcí všech tří proměnných x, y, z. Ekvivalentní zápis je užitím vektorového součinu

$$\vec{E} \times \mathrm{d}\vec{r} = \vec{0} \quad . \tag{45}$$

Pojem silokřivky je dostatečně znám z mechaniky (v mechanice tekutin odpovídá pojmu proudnice), proto ho zde nebudeme podrobněji rozebírat. Připomeňme jen, že silokřivky mají smysl hlavně lokální; globální výroky o jejich tvaru předpokládají hluboké znalosti o chování funkce $\vec{E}$ a zpravidla nejsou moc potřebné. (Např. nepatrná změna na jednom místě může podstatně změnit průběh silokřivky ve vzdálenějších místech; silokřivka magnetického pole $\vec{B}$ proudové smyčky obvykle hustě vyplňuje plochu apod.)

♣ K terminologii: **silo**křivky (či siločáry) popisují názorně rozložení vektorového pole a právě silové pole bylo první; odtud název. Obecně lze mluvit o **vektorových liniích**, ale nehrozí-li nedorozumění, zůstaneme u silokřivek. Obdobně u pole rychlosti proudící kapaliny byly zavedeny proudočáry, nyní zvané **proudnice**.

Podobně z integrálních transformací např. plyne

* Fourier: $\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}\,k(x-x'))\mathrm{d}k$,

* z ortogonálních funkcí (Bessel) $\delta(\rho-\rho') = \rho\int_0^\infty kJ_m(k\rho)J_m(k\rho')\mathrm{d}k$ apod.

Pro δ-funkci více proměnných použijeme jakobiánu $J = |J_{ij}| = |\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}|$ transformace:

* $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{J}\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\delta(\xi_3)$ apod.

2.12 Greenova věta. Obecné řešení Poissonovy úlohy. Greenova funkce

Ukážeme, že libovolné požadované pole φ v oblasti Ω můžeme vytvořit jako superpozici pole nábojů s jistou objemovou hustotou ρ uvnitř Ω, a dále nábojů a dipólů s jistými plošnými hustotami η_n a η_d na hranici $\partial\Omega = \Sigma$ této oblasti. Speciálně, pole buzené zdroji libovolně rozloženými v celém prostoru můžeme uvnitř této oblasti Ω vytvořit (týmiž) zdroji uvnitř oblasti Ω doplněnými výše popsanou superpozicí nábojů a dipólů na hranici oblasti Ω.

Připomeňme: pro $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ platí $\vec{\nabla}R^n = -\vec{\nabla}'R^n = nR^{n-2}\vec{R}$; $\triangle\frac{1}{R} = \triangle'\frac{1}{R} = -4\pi\delta(\vec{R}) = -4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$

Z Gaussovy věty $\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{v}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$ pro $\vec{v} = \left(\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi\right)$ dostaneme **Greenovu větu**

$$\int_\Omega (\varphi\triangle\psi - \psi\triangle\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega}\left(\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} \tag{124}$$

Přejděme od $\vec{r}$ k $\vec{r}\,'$, dosaďme $\psi = \frac{1}{R}$ a uvažme, že $\vec{\nabla}'\psi = -\frac{\vec{R}}{R^3}$, $\triangle'\psi = -4\pi\delta(\vec{R})$ a $\triangle'\varphi' = -\frac{\rho'}{\varepsilon_0}$; pak

$$-4\pi\int_{\Omega'}\left(\varphi(\vec{r}\,')\delta(\vec{R}) - \frac{1}{R}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}\Omega' = \int_{\partial\Omega'}\left(-\varphi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{\nabla}'\varphi(\vec{r}\,')}{R}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma'} \quad \text{, odkud} \tag{125}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega'}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\mathrm{d}\Omega' + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega'}\left(\varphi(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{\vec{\nabla}'\varphi(\vec{r}\,')}{R}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma'} \quad . \tag{126}$$

První člen je potenciál generovaný nábojem rozloženým s hustotou ρ v oblasti Ω', druhý a třetí popisují potenciály generované normálově orientovanými dipóly s plošnou hustotou $\varphi(\vec{r}\,')$ a náboji s plošnou hustotou $\vec{\nabla}'_\mathrm{n}\varphi(\vec{r}\,')$, obojí na povrchu $\partial\Omega'$ sledované oblasti Ω'.

Zkuste si jako cvičení co nejpečlivěji všechno odvodit s přesným rozlišováním, co a proč je funkcí $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$, R nebo $\vec{R}$.

2.13 Gaussův zákon v dielektriku; ±HRW 25-8 (26.8) 2013–10–26

2.13.1 Gaussův zákon obecně

Vyjdeme z rov. (115) svazující tok indukce $\vec{D}$ uzavřenou plochou $\Sigma \equiv \partial\Omega$ s celkovým nábojem uvnitř ve vakuu. A když je uvnitř látkové prostředí, tak budeme sledovat ionty a elektrony a „pro samé stromy neuvidíme les".

Z molekulové struktury látek je nám známo, že i navenek neutrální látka, pro níž platí tedy $\langle q\rangle = \int_{\Omega'}\rho'\mathrm{d}V' = 0$ pro každou makroskopickou oblast Ω', obsahuje uvnitř Ω' nabité částice (**vázané náboje** s hustotou $\rho_\text{váz}$) a lze ji přerozdělením těchto nábojů polarizovat (vnějším polem či mechanickou deformací u piezoelektrických látek s nízkou symetrií stavební buňky). To se dodatečně projeví i na elektrické intenzitě i indukci. Neradi bychom ovšem popisovali vázané náboje, na které „nemůžeme", které se přemístí samy, a spolu s volnými náboji o hustotě ρ_vol vytvářejí úhrnnou hustotu náboje ρ ve zkoumané oblasti:

$$\rho = \rho_\text{celk} = \rho_\text{vol} + \rho_\text{váz} \quad . \tag{127}$$

Zkusme proto popsat jen fenomenologicky, co se děje.

Procesem polarizace vznikly v neutrální látce dipóly; označme jejich hustotu $\vec{P}'$ (jde o zdroje, proto jejich poloha je popsána čárkovanou proměnnou). Elementární dipól $\vec{p}$ budí pole s potenciálem $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\vec{R}/r^3$ (podle rov. (94)), takže podle principu superpozice bude potenciál daný polarizací látky

$$\varphi_\text{váz} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\vec{P}'\mathrm{d}V'\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{P}'\cdot\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}V' \quad . \tag{128}$$

a také $\overrightarrow{\textbf{rot}}\,\vec{D} = 0$.

Spojením obou rovnic (116) a (117) dostaneme konečně pro potenciál φ buzený ve vakuu nábojem s hustotou ρ v oblasti Ω vztah

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\textbf{grad}}\,\varphi \equiv \triangle\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Poisson)} \quad . \tag{119}$$

Tato rovnice se nazývá **Poissonova**.

Pokud v uvažované oblasti náboje nejsou, dostáváme homogenní rovnici zvanou **Laplaceova**:

$$\triangle\varphi = 0 \qquad \text{(Laplace)} \quad . \tag{120}$$

K jednoznačnému určení potenciálu potřebujeme v obou případech ještě okrajové podmínky, např. hodnotu funkce φ nebo normálové složky $\vec{\nabla}_n\varphi$ jejího gradientu na hranici $\partial\Omega$ zkoumané oblasti Ω. Funkce splňující Laplaceovu rovnici se nazývají často **funkcemi harmonickými**.

2.11 δ-funkce

2017–09–30

„Jó, když se nechce, tak je to mnohem těžší, než když to jenom nejde.“ Toto životní moudro, spolu se zjištěním, že člověk konstruktivní se ptá JAK (to udělat), zatímco lenoch hledá PROČ (to nejde), budeme teď potřebovat pro pojem δ-funkce.

Jak zapsat hustotu $\delta(\vec{r})$ jednotkového bodového náboje umístěného v počátku souřadnic? Jak přecházet mezi spojitým a diskrétním rozložením náboje? Máme dva protichůdné požadavky:

1. $\delta(\vec{r}) = 0$ pro $\vec{r} \neq \vec{0}$, protože náboj je bodový;
2. $\int_\Omega \delta(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = 1$ pro libovolnou množinu Ω obsahující počátek, protože náboj je jednotkový.

„Funkce δ“ je tedy všude mimo počátek nulová, a v počátku musí mít tak obrovskou hodnotu (nekonečnou), aby se zachránila druhá podmínka. Ovšem jak brát uvedený integrál? Riemannův integrál se nehodí, bude nekonečný, Lebesgueův zase nulový, protože hodnota funkce v jediném bodě (obecně: na množině míry 0) nemůže změnit jeho hodnotu. Tedy funkce $\delta(\vec{r})$ (v obvyklém slova smyslu) neexistuje.

Zkusíme na to jít jinak. Ze známého rozložení náboje ρ dostaneme pole (např. potenciál φ) principem superpozice rov. (62): $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho'}{R}\mathrm{d}\vec{r}\,'$, zatímco naopak ze známého pole φ dostaneme rozložení náboje z Gaussova zákona ve tvaru rov. (119): $\triangle\varphi = -\rho/\varepsilon_0$. Zkusíme-li si to ověřit na případu jednotkového bodového náboje v počátku souřadnicové soustavy, vyjde nám

$$\delta(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0\triangle\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\triangle\frac{1}{4\pi r} \tag{121}$$

Derivace dá všude nulu, kromě počátku, kde není definována (a akceptovali bychom, že je nekonečná). Výsledek vypadá rozumně a vede nás k tomu, že „na tom něco je“. Zřejmě ale formulace byly natolik vágní, že jim doslova vyhovět nelze.

Druhý požadavek zaručuje další potřebnou vlastnost δ-funkce:

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\delta(y-x)\mathrm{d}x = f(y) \tag{122}$$

tedy že δ-funkci lze pokláat za jádro jednotkové konvoluce. Matematicky zcela korektní zpracování δ-funkce podává teorie distribucí. Zde však vystačíme s přibližným, intuitivním postupem: budeme uvažovat posloupnost funkcí $\delta_n(x)$ se zmenšujícím se nosičem polem počátku $x = 0$ a s plochou rovnou jedné (nebo aspoň s plochou blížící se jedné pro $n \to \infty$). Pak např. přechozí rovnici lze psát zápisem

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\delta_n(y-x)\mathrm{d}x = f(y) \tag{123}$$

a je mnoho posloupností funkcí $\delta_n(x)$ splňujících tuto rovnici, např.:

* „obdélník“ $\delta_n(x) = n/2$ pro $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\delta_n(x) = 0$ jinde;

* „trojúhelník“ $\delta_n(x) = 1 + nx$ pro $x \in [-\frac{1}{n}, 0]$, $\delta_n(x) = 1 - nx\frac{1}{n}$ pro $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\delta_n(x) = 0$ jinde;

* „zvon“ $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\exp(-nx^2)$ pro $n \in]-\infty, \infty[$;

2.4 Princip superpozice – HRW 21-4, 13-3 (22.4, 14.3)

Řečeno stručně a přesto pravdivě, popisuje princip superpozice tuto situaci:

Nastane-li několik příčin najednou, vyvolají součet svých důsledků (a nic navíc).

Matematickým popisem principu superpozice je přímá úměra, lineární závistost.

♣ Tři závažíčka způsobí na siloměru výchylku rovnou součtu výchylek jednotlivých závažíček; princip superpozice platí. Tisíc závaží by siloměr nejspíš poškodilo; princip superpozice by neplatil. Princip superpozice také neplatí v situaci, o které se říká „Stokrát nic umořilo osla“.

Pro silové působení nábojů princip superpozice platí. Platí i pro pole vytvářené náboji . Máme-li tedy N nábojů $q_k = q_1, \ldots q_N$ s polohami $\vec{r}_k$ a značíme-li $\vec{R}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$, pak síla působící na první náboj od ostatních je rovna

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1N} = \sum_{k=2}^{N}\vec{F}_{1k} \quad \text{, což zapisujme} \quad {\sum_k}'\vec{F}_{1k}, \quad \text{resp. podle rov. (38)} \\ \vec{F}_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}{\sum_k}'\frac{q_1 q_k}{R_{1k}^2}\vec{R}_{1k}^0 \end{aligned} \tag{46}$$

Čárka u značky sumy ${\sum_k}'$ značí, že při sčítání vynecháme jeden index (zde $k = 1$) tak, abychom neuvažovali působení náboje (zde prvního) sama na sebe.

Stejně tak platí princip superpozice pro elektrickou intenzitu:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} + \cdots + \vec{E}_{1N} = \sum_{k=2}^{N}\vec{E}_{1k} \quad \text{neboli} \quad {\sum_k}'\vec{E}_{1k}, \quad \text{resp. podle rov. (40)} \\ \vec{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}{\sum_k}'\frac{q_k}{R_{1k}^2}\vec{R}_{1k}^0 \end{aligned} \tag{47}$$

2.4.1 Rovnováha

Lze vymyslet konfiguraci nábojů, které budou v elektrostatické rovnováze. Jsou to např. dva kladné náboje $+4e$ a uprostřed mezi nimi elektron $-e$ (klasický Buridanův osel mezi dvěma otýpkami sena). Spočítejte si, že opravdu výsledná síla působící na každý z těchto tří nábojů je nulová. Uvažte ale také, že tato rovnováha není stálá. Energie $\mathcal{E}(\vec{r}\,')$ soustavy jako funkce polohy $\vec{r}\,'$ jednotlivých nábojů má sedlovitý tvar: vždy najdete sice směry, v nichž se náboj po vychýlení vrací zpět (elektron: kolmo ke spojnici nábojů), ale také směry, v nichž se náboj vychýlí ještě více (elektron: ke kterémukoliv z kladných nábojů). Rovnováha je tedy úhrnem vratká. Obecně platí **Earnshowova věta**:

Libovolná soustava nábojů (i s dipóly, multipóly, vodiči atd.) se neudrží ve stabilní rovnováze jen elektrickými, případně gravitačními silami.

←→ Důkaz Earnshowovy věty plyne z vlastností harmonických funkcí, tj. funkcí φ, pro něž platí $\triangle\varphi = 0$. Tyto mohou mít maximum jen na hranici $\partial\Omega$ množiny Ω, na níž jsou definovány. A funkce $\mathcal{E}(\vec{r}\,')$ je harmonická v proměnných souřadnic $\vec{r}\,'$ zdrojů pole. Argument v [2], str. 49, je mylný, např. pro funkci $\varphi = x^4 + y^4 + z^4$).

♣ Klasická fyzika proto nedokáže vysvětlit stabilitu atomů, molekul, pevných látek apod. U samotných gravitačních sil lze situaci zachránit *dynamickou rovnováhou*, kde částice kolem sebe obíhají po stabilních drahách jako planety kolem slunce. To však u náboje není možné, protože v teorii elektromagnetismu se ukazuje, že náboj pohybující se jinak než rovnoměrně přímočaře musí vyzařovat, a tedy ztrácet energii.

Earnshowovu větu lze stejně dokázat i pro magnetostatická pole, ale jen tehdy, pokud v soustavě *nejsou diamagnetika*; ta mají $\mu_\mathrm{d} < \mu_0$. Proto pro supravodiče (která jsou ideální diamagnetika a je v nich $\vec{B} = \vec{0}$), věta neplatí a supravodič v magnetickém a gravitačním poli může stabilně levitovat.

2.4.2 Hustota náboje

Extenzivní veličina Q je definována na oblasti Ω a platí pro ni princip superpozice, tj.

$$Q_\Omega = \sum_i \Delta Q_i = \int_\Omega \mathrm{d}Q \quad , \tag{48}$$

kde Ω je sjednocení disjunktních oblastí Ω_i a Q_i je hodnota Q na oblasti Ω_i. Pak má smysl zavádět hustotu $\rho\,(x, y, z)$ veličiny Q takovou, že

$$\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad , \tag{49}$$

takže celková hodnota Q v oblasti Ω je rovna součtu – v tomto případě integrálu – z dílčí veličiny (hustoty) přes tuto oblast:

$$Q_\Omega = \int_\Omega \rho(\vec{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{, často zapisovaný } \int \rho \mathrm{d}V, \int \rho \mathrm{d}^3 r, \int \rho \mathrm{d}^3 \vec{r} \tag{50}$$

- Zápis $\mathrm{d}V$ je zde ovšem zkratkou za $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, nikoli diferenciálem samostatné proměnné V, jako např. v termodynamice.
- Poslední zápisy připomínají, že $\mathrm{d}^3\vec{r}$ má rozměr L^3, nikoli L.

Je-li veličinou Q náboj q rozdělený v prostorové oblasti Ω či na povrchové oblasti Σ či na části Γ křivky, pak takto zavádíme **objemovou hustotu** ρ **náboje** (zvanou zpravidla jen **hustota náboje**) či **plošnou hustotu** η **náboje** či **délkovou**[11] **hustotu náboje** λ. Platí

$$q_\Omega = \int_\Omega \rho(\vec{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{51}$$

$$q_\Sigma = \int_\Sigma \eta(\vec{r})\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \tag{52}$$

$$q_\Gamma = \int_\Gamma \lambda(\vec{r})\mathrm{d}\xi \tag{53}$$

kde integrační proměnné x, y, z, ξ_1, ξ_2, ξ procházejí příslušnou integrační doménu (tj. Ω či Σ či Γ). S použitím aparátu δ-funkce (str. 29) můžeme však použitím objemové hustoty popsat všechny ostatní hustoty, i bodové náboje; např. bodový náboj q ležící v místě $\vec{r}\,'$ má v bodě $\vec{r}$ hustotu

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{R}) = q\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad \text{(hustota bodového náboje)} \tag{54}$$

2.4.3 Elektrická intenzita libovolně rozloženého náboje

Podle principu superpozice můžeme „složit“ dílčí infinitezimální pole. Budeme-li značit polohu $\vec{r}$ bodu v poli a polohu $\vec{r}\,'$ náboje budícího pole, potom platí

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R^2}\vec{R}^0\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \quad \text{stručně} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho'}{R^2}\vec{R}^0\mathrm{d}^3\vec{r}\,' \tag{55}$$

kde značíme $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ a $\vec{R}^0 = \frac{\vec{R}}{R}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{R}$. Často se pro stručnost značí $\rho' = \rho(\vec{r}\,')$, jak je uvedeno v posledním výrazu, a vynechává se integrační obor Ω (lze ostatně integrovat přes celý prostor, když tam, kde náboj není, položíme $\rho' = 0$).

[11] Dříve občas užívaný termín **lineární** (lat. linea = křivka) není vhodný, protože se kříží s pojmem lineární závislosti v matematice.

Tok ψ elektrické intenzity $\vec{E}$ uzavřenou plochou Σ je úměrný celkovému náboji q uvnitř Σ:

$$\psi = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad . \tag{113}$$

2.9.2 Elektrická indukce ve vakuu, Gaussův zákon elektrostatiky

Zaveďme, zatím jen ve vakuu, nové pole **elektrické indukce** $\vec{D}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \qquad \text{(zatím).} \tag{114}$$

Pak z rov. (113) triviálně plyne

Tok Ψ elektrické indukce $\vec{D}$ uzavřenou plochou Σ je roven celkovému náboji q uvnitř Σ:

$$\Psi = \oint_\Sigma \vec{D}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} = \int_\Omega \rho\,\mathrm{d}V = q \qquad \text{(Gaussův zákon elektrostatiky ve vakuu)} \tag{115}$$

$\hookleftarrow$ Nově zavedené pole $\vec{D}$ se vám nejspíš zdá zbytečné, když je prostě násobkem („osvědčeného“) pole elektrické intenzity $\vec{E}$. Tak tomu opravdu je ve vakuu. Pole $\vec{D}$ oceníme až tehdy, až se budeme zabývat situací ve hmotném prostředí v kap. 2.13. To bude navíc tvořeno vázanými nabitými částicemi tvořícími látku, ale těch si nebudeme chtít všímat. Budeme je chtít fenomenologicky popsat vhodnou makroskopickou vlastností materiálu (polarizací), a pracovat explicitně jen se zbývajícími (volnými) náboji. Vázané náboje pak zahrneme do elektrické indukce $\vec{D}$ v rov. (136).

2.10 Obrácená úloha. Poissonova a Laplaceova rovnice

Coulombův zákon ve tvaru rov. (55) a vzorec pro potenciál *libovolně* rozloženého náboje rov. (62) řeší úlohu nalézt pole, je-li zadáno libovolné rozložení zdrojů ρ; přitom náboje, jak bodové, tak i rozložené s hustotou délkovou či plošnou, postihneme v prostorové hustotě použitím δ-funkce (str. 29). Nyní se budeme zabývat úlohou obrácenou – najít, jaké musí být rozložení *zdrojů*, aby vytvořilo v oblasti Ω *předepsané pole*. Uvidíme, že i tato úloha je vždy řešitelná, a to jednoznačně např. v tomto smyslu: k libovolnému potenciálu φ uvnitř oblasti Ω najdeme takové rozložení náboje ρ uvnitř Ω a plošnou hustotu nábojů a dipólů na $\partial\Omega$, které vytvoří uvnitř Ω požadovaný potenciál.

♣ Podobnými úlohami se v matematice zabývá **teorie potenciálu**, široká oblast s širokou praktickou aplikací. My jí přenecháme existenční důkazy a omezení kladená na zadávané funkce z matematického hlediska. Omluvou nám bude nejen *praktický* požadavek, kdy všechny veličiny jsou *změřeny* jen s konečnou přesností, ale i *principiální* fakt, že v makroskopické fenomenologické teorii elektromagnetismu se setkáme jen s dostatečně hladkými funkcemi (vzniklými vystředováním funkcí mikroskopických), a nanejvýš s modelovým skokem na rozhraní dvou prostředí.

Použitím Gaussovy věty z matematiky na Gaussův zákon ve tvaru rov. (115) dostaneme, že platí rovnice $\int_\Omega \operatorname{div}\vec{D}\mathrm{d}V = \int_\Omega \rho\mathrm{d}V$. Jsou-li si však rovny integrály přes *libovolnou* dílčí oblast Ω, pak předpokládáme, že si budou rovny i integrandy, tedy že v celé oblasti Ω bude platit

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \quad . \tag{116}$$

♣ Toto tvrzení je ekvivalentní tvrzení, že z platnosti rovnice $\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = 0$ pro libovolnou oblast Ω plyne $f(x) = 0$. To by si ovšem vyžádalo hlubšího rozboru; protipříkladem by byla např. funkce $f(x)$ nenulová na množině míry 0, jinde nulová. Spokojme se však např. s požadavkem spojitosti funkce f; pak věta platí.

Připomeňme dále, že intenzita $\vec{E}$ byla konzervativním polem, protože měla potenciál φ:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi \quad . \tag{117}$$

Pak zřejmě platí také, že $\vec{D} = -\varepsilon_0\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi$. Z těchto rovnic plyne, že

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} = 0 \tag{118}$$

Objemovou rychlost $\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma}$ lze interpretovat jako infinitezimální tok $d\psi$ vektoru $\vec{v}$ orientovanou ploškou $\overrightarrow{d\Sigma}$. Snadno nahlédneme, že tento tok je roven $d\psi = \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma}$ při libovolné prostorové orientaci uvažované plošky $\overrightarrow{d\Sigma}$. Z aditivity plyne, že má smysl definovat **tok vektorového pole** $\vec{v}$ obecnou orientovatelnou plochou Σ jako součet (integrál) dílčích toků:

$$\psi = \int_\Sigma d\psi = \int_\Sigma \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} \qquad (\text{tok } \psi \text{ vektoru } \vec{v} \text{ plochou } \Sigma) \tag{108}$$

♣ Všimněte si, že doba dt, užitečná pro názornou interpretaci toku tekutiny, se v definici toku už nevyskytuje. To nám umožňuje užít pojem toku i na vektorové pole nemající charakter rychlosti nějakého pohybu.

2.8.1 Tok uzavřenou plochou

Uvažujme nyní plochu Σ, která je uzavřená a vymezuje jistou 3D vnitřní doménu Ω o objemu $\mathit{\Omega}$ (je zřejmě $\partial\Omega \equiv \Sigma$). Pak celkový tok uzavřenou plochou Σ bude roven objemovému množství tekutiny, které v objemu Ω ubyde. (Na tomto úbytku není nic mystického, ani když tekutina je substancí: plyn tam prostě zřídne, klesne jeho hustota ρ, ale jeho celková hmotnost se při proudění bude zachovávat.)

Gaussova věta z matematiky vysvětluje termín „divergence“ pole (lat.: rozbíhání, úbytek):

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \oint_{\partial\Omega} v_n d\mathit{\Sigma} \tag{109}$$

Kroužek na značce integrálu připomíná, že integrační plocha je uzavřená.

2.9 Gaussův zákon – HRW 23 (24)

2.9.1 Gaussův zákon pro $\vec{E}$ a bodový náboj

Aplikujme Gaussovu větu na pole $\vec{E}$ elektrické intenzity.

Uvažujme nejprve pole jediného bodového náboje Q o náboji $q > 0$ v počátku souřadnic a kolem něj kouli K_r o poloměru r. Vytýčíme z náboje elementární kužel mající vrcholový úhel $d\mathit{\Omega}$. Ten na kouli K_r vytíná plošku $d\Sigma$ s obsahem $d\mathit{\Sigma} = r^2 d\mathit{\Omega}$. Ploška má zřejmě vnější normálu v radiálním směru $\vec{r}_0$ souhlasně rovnoběžnou s intenzitou $\vec{E}$ pole buzeného nábojem. Tok pole $\vec{E}$ ploškou $d\Sigma$ je tedy roven

$$d\psi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} r^2 d\mathit{\Omega} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\mathit{\Omega} \quad . \tag{110}$$

Tok intenzity $\vec{E}$ celou koulí K_r (a to s libovolným poloměrem r) bude tedy

$$\psi = \int_K d\psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_K d\mathit{\Omega} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad , \tag{111}$$

protože plný prostorový úhel má velikost 4π.

Nezávislost toku na poloměru koule dává tušit, že uzavřená plocha obklopující náboj může mít libovolný tvar, nejen koule s (libovolným) poloměrem r. Opravdu, šikmá ploška $d\Sigma$ odpovídající elementárnímu kuželu, jejíž normála svírá úhel θ s radiálou $\vec{r}_0$, má sice obsah větší (a to $\frac{d\mathit{\Sigma}}{\cos\theta}$), ale tento „zisk“ se přesně ztratí skalárním součinem. Tok ψ elektrické intenzity $\vec{E}$ bodového náboje q, který je uvnitř uzavřené plochy Σ, je roven $\frac{q}{\varepsilon_0}$:

$$\psi = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\Sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad . \tag{112}$$

Bodový náboj q', který by byl *vně* objemu uzavřeného plochou Σ, se však v celkovém toku neuplatní: jeho elementární kužel protíná plochu uvažovanou dvakrát, a to v opačných orientacích, takže se oba příspěvky navzájem vyruší.

Nyní stačí použít princip superpozice na libovolnou soustavu nábojů unitř oblasti vymezené plochou Σ a dostaneme závěrečnou formulaci:

2.5 Potenciál – HRW 24 (25)

2.5.1 Zavedení potenciálu – HRW 24-3 (25.2)

Pro popis elektrické interakce – síly $\vec{F}$ působící mezi náboji – jsme zavedli v kap. 2.3 elektrickou intenzitu $\vec{E}$. Je to vektorové pole, tedy trojice nezávislých funkcí. Ukazuje se však, že popis můžeme zjednodušit. V mechanice existuje k vektorovému poli konzervativní síly $\vec{F}(\vec{r})$ (např. tíhové síly) skalární pole potenciální energie $U(\vec{r})$ a k vektorovému poli intenzity[12] $\vec{I}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$ pole potenciálu $\varphi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{m}$ tak, že platí

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, U(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \tag{56}$$

$$\vec{I}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \quad . \tag{57}$$

♣ Operátor nabla $\vec{\nabla}$ je vektor, proto ho zde pro připomenutí píšu se šipkou. V literatuře je zpravidla místo šipky tištěn tučně.

Podobně i v elektrostatice lze zavést k elektrostatické síle potenciální energii a zejména lze k poli elektrické intenzity $\vec{E}(\vec{r})$ zavést **elektrický potenciál** $\varphi(\vec{r})$ takový, že platí

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) \tag{58}$$

Z uvedené definice je zřejmé, že potenciál je definovaný až na aditivní konstantu, tj. vyhovuje-li potenciál $\varphi(\vec{r})$ dané úloze, pak potenciál $\varphi'(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \mathsf{konst}$ jí vyhovuje také.

Konkrétně pro energii soustavy dvou bodových[13] nábojů Q, Q' s náboji q, q' a polohami $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ platí

$$U(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{R} + \mathsf{konst} \tag{59}$$

kde $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$, a pro potenciál φ bodového náboje Q ve vzdálenosti $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ od něj platí

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} + \mathsf{konst.} \tag{60}$$

Protože měřitelnou veličinu (sílu či intenzitu) z energie či potenciálu získáme derivací, může být tato konstanta libovolná. Volíme ji tak, aby potenciál měl vhodnou hodnotu (např. 0) ve vhodném místě (např. v nekonečnu, na vhodném vodiči apod.). Princip superpozice platí i pro potenciál, takže pro soustavu bodových nábojů s náboji q_k a s danými polohami $\vec{r}_k$ platí

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k}{R_k} + \mathsf{konst} \tag{61}$$

a pro spojitě rozložený náboj s hustotou $\rho(\vec{r}\,')$ je potenciál

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' + \mathsf{konst}, \qquad \text{často stručně psáno (srv.rov. (55))} \tag{62}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho'}{R} d^3\vec{r}\,', \qquad \text{aditivní konstanta a integrační obor se rozumějí samy sebou.} \tag{63}$$

Jednotkou potenciálu je joule na coulomb, J/C. Vyskytuje se tak často, že má své jméno, a to *volt*[14] (italský fyzik Alessandro Volta):

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J/C} \tag{64}$$

[12] která je u gravitačního či tíhového pole totožná s gravitačním či tíhovým zrychlením

[13] Zde cvičně rozlišujeme *objekt* Q (nosič náboje, bodový náboj) a jeho *vlastnost* – fyzikální *veličinu*, náboj q.

[14] Připomeňme pravidlo, že jednotky odvozené od jmen osob mají název s malým písmenem a značku s velkým: volt V, ampér A. Výjimkou je povolen litr i jako L pro možnou záměnu malého písmene l s číslovkou 1.

Připomeňme, že **potenciál** určujeme v jednom bodě (a je určen jednoznačně, až na volitelnou konstantu, jak víme); **rozdíl potenciálů** zvaný **napětí** je vždy mezi dvěma body (a ona konstanta už se v něm nevyskytne).

Rov. (58) určí neznámou intenzitu z daného potenciálu. Máme-li obráceně určit neznámý potenciál k dané intenzitě, dostaneme ho křivkovým integrálem:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{\xi}) \cdot \mathrm{d}\vec{\xi} + \varphi(\vec{r}_0) \tag{65}$$

Tři poznámky:

1. konstanta ve vzorci (59) a následujících je dána volbou výchozího bodu $\vec{r}_0$;
2. pokud je $\vec{F}$ nebo $\vec{E}$ konzervativní, tak integrál v rov. (65) nezávisí na integrační cestě. Pokud není, pak budou hodnoty integrálů pro různé cesty obecně různé a potenciál nelze zavést;
3. toto vše platí v elektrostatickém poli. V obecném poli, kde $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} \neq \vec{0}$, jsou potenciál i napětí definovány přiměřeně této okolnosti (str. 53).

Správnost rov. (65) nahlédneme dosazením z rov. (58):

$$-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{\xi})\cdot \mathrm{d}\vec{\xi} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi(\vec{\xi})\cdot \mathrm{d}\vec{\xi} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\varphi = \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) \tag{66}$$

Je také zřejmé, co by se stalo u pole nekonzervativního: tam by výraz v závorce nebyl úplným diferenciálem a integrace po různých cestách by obecně vedla k různým výsledkům.

2.5.2 Ekvipotenciální plochy – HRW 24-4 (25.3)

Podobně jako vektorové pole jsme znázorňovali vektorovými liniemi (silokřivkami), můžeme názorně zobrazit skalární pole **ekviskalárními plochami**. V případě potenciálu se jim říká ekvipotenciální a jsou to plochy, na nichž má potenciál tutéž hodnotu: $\varphi = \varphi_0$ (viz např. obr. 24-2 (25.2) a další v HRW). Mají tedy stejný význam jako vrstevnice, spojující na mapě místa se stejnou hodnotou nadmořské výšky.

¿? Silokřivky jsou kolmé k ekvipotenciálním plochám; dokažte to! Odp. je na str.8.

2.5.3 Energie nábojů a pole

Nejprve hrubou úvahou projdeme od energie soustavy bodových nábojů přes nabité kontinuum k polnmu pojetí; dodatečně rozebereme problematiku podrobněji.

Soustava bodových nábojů Uvažujme soustavu N bodových[15] nábojů q_i v místech $\vec{r}_i$; první leží v bodě $\vec{r}_1$, ostatní zatím v nekonečnu[16].

Označme pro zkrácení zápisu potenciál v místě $\vec{r}_k$ vyvolaný jednotkovým nábojem ležícím v $\vec{r}_j$:

$$\Phi_{jk} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r_j - r_k|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_{jk}} \quad ; \text{zřejmě} \quad \Phi_{jk} = \Phi_{kj} \quad . \tag{67}$$

Potenciál φ_{jk}, který v místě $\vec{r}_k$ budí náboj q_j, je tedy roven

$$\varphi_{jk} = q_j \Phi_{jk} \quad . \tag{68}$$

První náboj budí v místě $\vec{r}_2$ potenciál $\varphi_{12} = q_1\Phi_{12}$, takže pro přenesení náboje q_2 z nekonečna do $\vec{r}_2$ musíme vykonat práci

$$W_{21} = q_2\varphi_{12} = q_2 q_1 \Phi_{12} \tag{69}$$

[15] Zde pro změnu a pro stručnost nerozlišujeme bodový náboj (objekt) od jeho náboje q (fyzikální veličiny). Zkuste si to ale – rekreačně – rozlišit sami!

[16] tj. při měření s konečnou přesností tak daleko, kde už je interakce zanedbatelná a kde volíme $\varphi = 0$

Volba L_0 určuje vzdálenost, v níž je potenciál nulový.

Výraz pro intenzitu dostaneme odtud snadno derivací, ale lze ho díky vysoké symetrii dostat mnohem snadněji, bez výpočtu potenciálu, jakmile poznáme Gaussův zákon, rov. (113). Intenzita má zřejmě nenulovou jen radiální část směrem kolmo od nabité přímky a velikost

$$E(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{102}$$

2.7.2 Pole rovnoměrně nabité roviny a na ose disku – HRW 22-7, 24-9 (23.7, 25.8)

Homogenně nabitý ($\rho > 0$) disk o poloměru R v rovině xy se středem v počátku souřadnic budí na ose z potenciál φ a pole o velikosti E (viz např. HRW)

$$\varphi(z) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - z) \tag{103}$$

$$E(z) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}), \quad \text{směr } \vec{E} \text{ kolmo od roviny xy} \tag{104}$$

Rovina xy rovnoměrně nabitá nábojem hustoty ρ budí na ose z pole

$$\varphi(z) = \frac{\rho|z|}{2\varepsilon_0} \tag{105}$$

$$E(z) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}, \quad \text{směr } \vec{E} \text{ kolmo od roviny xy.} \tag{106}$$

I tuto úlohu je možno řešit integrací a limitou (zkuste si sami), a i zde je díky vysoké symetrii mnohem jednodušší užití Gaussova zákona podle rov. (113).

2.7.3 Přehled

Závislost potenciálu φ a velikosti $E = |\vec{E}|$ intenzity různých typů zdrojů na vzdálenosti r od zdroje ukazuje následující tabulka:

zdroj	φ	E
nabitá rovina	r	konst
nabitá přímka	$\ln r$	r^{-1}
bodový náboj	r^{-1}	r^{-2}
dipól	r^{-2}	r^{-3}
multipól řádu 2^n	r^{-n-1}	r^{-n-2}

Na bodový náboj působí v elektrickém poli síla, na bodový dipól v *homogenním* poli jen otáčivý moment (ale v nehomogenním poli působí navíc i síla, a to úměrná gradientu pole).

2.8 Tok vektoru plochou – HRW 23-2 (24.2)

V hydrodynamice můžeme popsat proudící tekutinu (i stlačitelnou) skalárním polem hustoty $\rho(\vec{r})$ a vektorovým polem rychlosti $\vec{v}(\vec{r})$. Představa tekutiny nám pomůže osvětlit řadu pojmů. Jedním z nich je tok vektorového pole $\vec{v}$ orientovanou[19] plochou Σ o obsahu $\mathit{\Sigma}$ a s hranicí $\Gamma \equiv \partial\Sigma$.

Na orientované ploše Σ zavedeme vnější a vnitřní normálu; jde-li o plochu uzavřenou, je jejich orientace jasná, pokud ne, zvolíme je libovolně. Spočítejme nyní, jaký je tok tekutiny touto plochou „zevnitř ven“, tj. směrem vnější normály.

Sledujme nejprve u bodu $\vec{r}$ elementární obdélníček $\mathrm{d}\Sigma$ o obsahu $\mathrm{d}\mathit{\Sigma}$ rovnoběžný s rovinou xy, o stranách délky $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$, s vnější normálou ve směru osy z a zobrazený vektorem $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathit{\Sigma}}$. Za dobu $\mathrm{d}t$ jím proteče „šikmý hranolek“ tekutiny o objemu

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}t\,\vec{v}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{d}x} \times \overrightarrow{\mathrm{d}y}) = \vec{v}\cdot\vec{z}_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = v_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = v_z\,\mathrm{d}\mathit{\Sigma}\,\mathrm{d}t \quad . \tag{107}$$

[19] Möbiův list či Kleinova láhev jsou příklady neorientovatelných ploch majících za hranici topologickou kružnici. Ale při jakékoli 3D reprezentaci takové plochy a blány uzavírající její hranici prochází část plochy touto blánou. V dalším se nebudeme takovými situacemi zabývat a většinou nebudeme ani požadavek orientovatelnosti zmiňovat.

2.6.4 Věta o multipólovém rozvoji

Pokládáme-li bodový náboj za multipól řádu 0, platí následující věta (analogická Taylorovu rozvoji):

> *Potenciál libovolné soustavy nábojů umístěné uvnitř koule* K *se středem* S *je vně této koule stejný jako potenciál jednoznačně určené soustavy elementárních multipólů řádů $n = 0, 1, \dots$ ležících vesměs v bodě* S.

Moment multipólu nejnižšího řádu je přitom týž, zvolíme-li jiný bod S' a jinou kouli K', která rovněž obsahuje všechny uvažované náboje. Momenty vyššího řádu se však obecně změní.

2.7 Pole jednoduchých soustav

Při známém rozdělení zdrojů lze určit pole integrací přes $\mathrm{d}q' = \rho'\, dV'$, tedy intenzitu $\vec{E}$ podle rov. (55) a potenciál φ podle rov. (62). Zpravidla bude výpočet potenciálu jednodušší prostě proto, že jde o jedinou funkci a integrand je jednodušší. Integrál však může divergovat, pokud je náboj rozložen v neomezené oblasti (např. homogenně nabitá přímka či rovina). Pak je nutno použít vhodnou **renormalizaci**, tedy odečtení jistého nekonečného, ale konstantního výrazu s vědomím, že fyzikální význam mají stejně jen rozdíly potenciálů ve dvou místech, a při nich by nepříjemná konstanta stejně vypadla. (Podobně je tomu, vyjde-li energie stavů jisté soustavy nekonečná: měřitelný je však jen rozdíl energií ve dvou stavech, a ten bude konečný.)

V příkladech s nejvyšší symetrií lze s výhodou počítat podle Gaussovy věty přímo intenzitu $\vec{E}$ (resp. později indukci $\vec{D}$), jak také ukážeme.

2.7.1 Pole rovnoměrně nabité úsečky a přímky – HRW 22-6, 24-9 (23.6, 25.8)

Potenciál φ úsečky ležící v ose x od $x = 0$ do $x = L$, rovnoměrně nabité s délkovou hustotou náboje τ lze řešit přímou integrací podle rov. (62), jak je provedeno např. v HRW. Potenciál $\varphi(x, r)$ v bodě s polární souřadnicí r je roven (subst. $\sqrt{x^2 + r^2} = x + \xi$)

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\tau}{\sqrt{x^2+r^2}}\mathrm{d}x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{L+\sqrt{L^2+r^2}} \frac{2\xi}{r^2+\xi^2}\frac{r^2+\xi^2}{2\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{L+\sqrt{L^2+r^2}}{r}\right| + \mathsf{konst} \tag{97}$$

S aditivní konstantou nulovou je potenciál v nekonečnu ($r \to \infty$) nulový, jak je zřejmé; argument logaritmu se blíží jedné.

Pro nekonečnou polopřímku tuto úlohu vyřešíme limitou $L \to \infty$ z předchozího vzorce. Jakmile však sahá náboj do nekonečna, nelze obecně očekávat nulový potenciál v nekonečnu. Zvolíme libovolnou (ale pevnou) délku L_0 jako jednotku; jejím zavedením[18] se vyhneme problému logaritmu veličiny r s rozměrem délky. Rozvineme-li výraz asymptoticky pro malá $\alpha = r/L = (r/L_0)/(L/L_0)$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha^2+1}}{r/L} + \mathsf{konst} && (98)\\
&\simeq \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln(2+\frac{1}{2}\alpha^2) - \ln\frac{r}{L_0} + \ln\frac{L}{L_0}\right) + \mathsf{konst} && (99)\\
&\simeq -\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{L_0} + \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2L}{L_0} + \mathsf{konst} \quad . && (100)
\end{aligned}$$

Druhý člen pro $L \to \infty$ roste do nekonečna, ale nezávisí na r. Lze ho tedy pro každé L zahrnout do konst. Pro celou přímku složenou ze dvou polopřímek zvolíme konst tak, že anuluje druhý člen:

$$\varphi(r) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{L_0} \quad . \tag{101}$$

[18] Pro matematika je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ funkce $F(x) = \ln|x| + \mathsf{konst}$. Fyzik raději volí tvar $F(x) = \ln\frac{x}{x_0}$, kde x_0 je vhodná „typická“ délka (zde L_0). Vyřeší tím rozměrový problém „kolik je logaritmus 1 metru“, na kterou vtipálek odpoví „logaritmus 100 plus logaritmus centimetru“.

a energie soustavy prvních dvou nábojů bude tedy

$$U_{12} = q_1 q_2 \Phi_{12} \quad . \tag{70}$$

Stejnou energii $U_{21} = U_{12}$ by ovšem měla také soustava vzniklá tak, že bychom nejprve uvažovali náboj Q_2, a k němu z nekonečna přisunuli náboj Q_1; platí tedy

$$U_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_1}{R_{21}} = U_{12} = \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21}) \quad . \tag{71}$$

K této soustavě přisuneme další náboj q_3 z nekonečna do $\vec{r}_3$, a tím vykonáme práci $q_3\varphi_3$. Podle principu superpozice je $\varphi_3 = \varphi_1(\vec{r}_3) + \varphi_2(\vec{r}_3) = \varphi_{13} + \varphi_{23}$ a soustava má nyní energii

$$\begin{aligned}
U_{123} &= U_{12} + q_1 q_3 \Phi_{13} + q_2 q_3 \Phi_{23} = q_1 q_2 \Phi_{12} + q_1 q_3 \Phi_{13} + q_2 q_3 \Phi_{23} && (72)\\
&= \frac{1}{2}\left(q_1 q_2 \Phi_{12} + q_1 q_3 \Phi_{13} + q_2 q_1 \Phi_{21} + q_2 q_3 \Phi_{23} + q_3 q_1 \Phi_{31} + q_3 q_2 \Phi_{32}\right) && (73)
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že pro obecný celý počet N nábojů dostaneme výslednou energii soustavy ve tvaru

$$U_{1..N} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}^{N}\sum_{j=1}^{N} q_j q_k \Phi_{jk} \equiv \frac{1}{2}{\sum_k}' \sum_j q_j q_k \Phi_{jk} = \frac{1}{2}{\sum_k}'\sum_j q_j \varphi_{kj} \quad . \tag{74}$$

Čárka u sumy znamená, že vylučujeme sčítance se stejnými indexy, protože by představovaly interakci částice se sebou samou – energii, kterou by měla částice ve svém vlastním poli. Ta má (s nulovým jmenovatelem) nekonečnou hodnotu; k tomu se vrátíme za chvilku.

Spojitě rozložený náboj Uvažujme zdroj nikoli bodový, ale spojitě rozdělený s hustotou $\rho(\vec{r})$. Namísto q_j zavedeme $\mathrm{d}q = \rho(\vec{r}_j)\mathrm{d}V$, namísto q_k zavedeme $\mathrm{d}q' = \rho(\vec{r}\,'_k)\mathrm{d}V'$ a sčítání přejde v integraci. Rov. (74) získá tvar

$$\begin{aligned}
U_{1..N} &= \frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma \rho(\vec{r})\mathrm{d}V\ \rho(\vec{r}\,')\mathrm{d}V'\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho(\vec{r})\left(\int_\Gamma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}V'\right)\mathrm{d}V && (75)\\
&= \int_\Gamma \frac{1}{2}\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\mathrm{d}V \quad . && (76)
\end{aligned}$$

První (dvojnásobný) trojrozměrný integrál je konečný i s nulovým jmenovatelem pro $\vec{r} = \vec{r}\,'$ a není tedy nutno tuto singularitu samostatně ošetřovat, jak jsme museli u diskrétních nábojů. Poslední (jednoduchý, trojrozměrný) integrál konverguje už zcela bez problémů. Jsou-li náboje vesměs v konečné oblasti Γ, jsou obě funkce konečné, omezené.

Poslední integrand lze interpretovat jako energii soustavy, rozloženou na ***nábojích*** (majících hustotu ρ) a danou tím, že náboj $\rho\mathrm{d}V$ leží ve více nebo méně energií bohaté oblasti (potenciál φ). Odpovídá staršímu pojetí elektromagnetismu s polem jako pouhým prostředníkem interakce (Coulomb).

Polní pojetí Pro přehlednost nevypisujeme u φ, ρ argument $\vec{r}$. Rov. (76) upravíme dosazením z rov. (11): $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$, a následující úpravou $\vec{\nabla}\cdot(a\vec{b}) = \vec{\nabla}a\cdot\vec{b} + a\vec{\nabla}\cdot\vec{b}$:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho\,\varphi\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_\Gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\,\varphi\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_\Gamma\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{D}\varphi\right) - \vec{D}\cdot\vec{\nabla}\varphi\right)\mathrm{d}V && (77)\\
&= \frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{D}\varphi\right)\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V && (78)\\
&= \frac{1}{2}\oint_\Sigma (D_\mathrm{n}\varphi)\,\mathrm{d}\Sigma + \int_\Gamma \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V \quad . && (79)
\end{aligned}$$

První integrál (získaný podle Gaussovy věty) do nekonečna vymizí, protože D ubývá jako r^{-2}, φ jako r^{-1}, zatímco povrch Σ roste jen jako r^2. Druhý integrand, zřejmě vždy nezáporný, lze interpretovat jako hustotu energie elektrického pole:

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \tag{80}$$

Tento výraz naopak nepostihuje náboje, ale připisuje energii elektrickému ***poli*** (intenzita $\vec{E}$, indukce $\vec{D}$), které náboje vytvořily (moderní polní pojetí; Faraday, Maxwell).

$\hookleftarrow$ Uvedený postup naznačuje problematiku, není ovšem exaktní. Bylo by nutno analogicky zahrnout i jiné druhy nábojů: nabité plochy apod. Zájemce se o problematice dozví v každé podrobnější učebnici, např. [6].

$\hookleftarrow$ **Vlastní energie bodového náboje; renormalizace** Popisovaný postup má jeden principiální problém: bodový náboj je sice velice výhodný a praktický model, ale má neodstranitelný nedostatek, že jeho vlastní energie je nekonečně veliká („Elektron je cizinec v klasické elektrodynamice“, Lorentz). Energie nabité koule o poloměru r je totiž řádově rovna $U_r \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r}$ (koeficient úměrnosti závisí na rozložení náboje, zda homogenně v celém objemu či jen na povrchu apod.) a diverguje tedy pro bodový zdroj ($r \to 0$) jako $U_0 \approx 1/r \to \infty$. Na druhou stranu: tato energie U_0 je sice nekonečná, ale pokud bodový náboj jen přemísťujeme a „neštěpíme ho“ ani „neslepujeme s jiným“, zůstává jeho energie stále stejná.

Protože pole $\vec{E}$ je aditivní a pro hustotu energie platí $u \approx E^2$, můžeme psát pro soubor $[1+2]$ tvořený bodovými náboji ^{1}Q, ^{2}Q ve vakuu, mající pole $\vec{E}_{[1+2]}$ a hustotu energie $u_{[1+2]}$

$$\vec{E}_{[1+2]} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{81}$$

$$u_{[1+2]} \approx (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \tag{82}$$

$$\approx E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \tag{83}$$

$$u_{[1+2]} = u_1 + u_2 + u_{12} \tag{84}$$

kde u_1, resp. u_2 představuje hustotu energie prvního resp. druhého náboje, a jen samotné u_{12} je vlastní interakční energie, tj. energie, kterou mají zkoumané bodové náboje „tím, že jsou si na dosah“. Integrály přes celý prostor $\int u_1 \,\mathrm{d}V = U_0$ i $\int u_2 \,\mathrm{d}V = U_0$ divergují, ale $\int u_{12} \,\mathrm{d}V$ je konečný a má zřejmě rozumný smysl – je to „vzájemná“ energie soustavy dvou bodových nábojů.

V další práci tedy neuvažujeme nekonečnou vlastní energii bodového náboje. Jako energii soustavy dvou bodových nábojů bereme nikoli celé $u_{[1+2]}$, ale jen část u_{12}. Tento proces se nazývá **renormalizace**.

$\hookleftarrow$ Není jistě třeba přesvědčovat, že přesnější metoda, na to, aby byla korektní, je o dost komplikovanější. Princip je ale stejný a podstatné je to, že je tato metoda nakonec úspěšná a souhlasí s experimenty.

2.6 Pole významných zdrojů

2.6.1 Bodový náboj – HRW 24-6 (25.5)

Pole bodového náboje je určeno Coulombovým zákonem, viz kap. 2.2, s potenciálem rov. (60):

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} + \mathsf{konst.} \tag{85}$$

kde q je náboj, $R := |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ a ε_0 je elektrická konstanta.

Praktickou realizací bodového náboje je elektron (pro $R > 10^{-15}$ m), v molekulové fyzice též ionty (mají rozměr molekul).

Vzhledem k dalším úvahám zaveďme označení

$$\varphi^{(0)}(R) := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \tag{86}$$

$$p^{(0)} := q \tag{87}$$

takže potenciál bodového náboje q o náboji q je roven $\varphi = q\varphi^{(0)} = p^{(0)}\varphi^{(0)}$.

2.6.2 Dipól – HRW 24-8 (25.7)

Dipólem se nazývá soustava elektrických nábojů s nulovým úhrnným nábojem, tj.

$$\sum_k q_k = 0 \quad \text{, resp.} \quad \int_V \rho' \mathrm{d}^3\vec{r}\,' = 0 \tag{88}$$

a nenulovým **dipólovým momentem**

$$\sum_k q_k \vec{r}_k \neq \vec{0} \quad \text{, resp.} \quad \int_V \rho' \vec{r}\,' \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \neq \vec{0} \quad . \tag{89}$$

Elementární dipól (také **bodový dipól**) je velice významným typem zdroje a dostaneme ho touto konstrukcí:

Bodový náboj o hodnotě q umístěný v bodu $\vec{r}\,'$ budí pole $q\,\varphi^{(0)}$. Nyní tento náboj posuneme o $\vec{l}$ do bodu $\vec{r}\,'' = \vec{r}\,' + \vec{l}$ a na uvolněné místo $\vec{r}\,'$ umístíme náboj o hodnotě $-q$. Při označení $\vec{R}'' = \vec{r} - \vec{r}\,''$ tedy naše soustava budí pole

$$\varphi(\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{r}\,'') = q\left(\varphi^{(0)}(R'') - \varphi^{(0)}(R')\right) = q\left(\varphi^{(0)}(|\vec{r} - \vec{r}\,' + \vec{l}|) - \varphi^{(0)}(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)\right) \tag{90}$$

což můžeme upravit rozvojem podle $\vec{l}$ pomocí Taylorovy věty:

$$\varphi(\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{l}) = q\left(\varphi^{(0)} + \vec{l} \cdot \vec{\nabla}'\varphi^{(0)} + \mathcal{O}(|\vec{l}|^2) - \varphi^{(0)}\right) \tag{91}$$

$$= \left(q\vec{l} \cdot \vec{\nabla}'\varphi^{(0)}\right) + \mathcal{O}(|q\vec{l}|^2) \quad , \tag{92}$$

a to[17] pro $\lim l \to 0, \lim q \to \infty$ za podmínky $\lim q\vec{l} \to \vec{p}^{(1)}$ přechází na

$$\varphi^{(1)} \equiv \varphi(\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{p}^{(1)}) := \vec{p}^{(1)} \cdot \vec{\nabla}'\varphi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}^{(1)} \cdot \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \quad . \tag{93}$$

Uvědomíme-li si ještě, že $\vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}$ a označíme-li $\vec{l}_0^{(1)} \equiv \vec{l}/l$, můžeme potenciál nového typu bodového zdroje – elementárního dipólu – zapsat tvarem

$$\varphi^{(1)} = p\,\vec{l}_0^{(1)} \cdot \vec{\nabla}'\varphi^{(0)} = -p\,\vec{l}_0^{(1)} \cdot \vec{\nabla}\varphi^{(0)} \quad \left(= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}\right) \quad \text{(potenciál elementárního dipólu)} . \tag{94}$$

Potenciál dipólu ubývá tedy se vzdáleností jako R^{-2}, o řád rychleji než u náboje („monopólu“).

Praktickou realizací elementárního dipólu je mnoho neutrálních molekul (tzv. **polární molekuly**, jako H_2O apod.), případně původně nepolární molekuly (He, CO_2) ve vnějším elektrickém poli, které jim částečně přesune elektronový oblak jedním směrem.

2.6.3 Kvadrupól, multipóly

Analogickým způsobem dojdeme k multipólům vyššího řádu (obecně řádu 2^n). Kvadrupól dostaneme z dipólu s momentem $\vec{p}$, který opět přesuneme poblíž, o $\vec{l}$ do $\vec{r}\,'''$ a na uvolněné místo uložíme dipól s opačným momentem. Poté opět provedeme limitní přechod $l \to 0$, $p \to \infty$ a $\lim pl = \frac{1}{2}p^{(2)}$ a přeznačíme $\vec{l} \equiv l\vec{l}_0^{(2)}$, $p \equiv p^{(2)}$. Tak vznikne elementární kvadrupól charakterizovaný svou velikostí $p^{(2)}$ a dvěma směry $\vec{l}_0^{(1)}$, $\vec{l}_0^{(2)}$, mající potenciál

$$\varphi^{(2)} := \frac{1}{2}p^{(2)}\,(\vec{l}_0^{(2)} \cdot \vec{\nabla}')\,(\vec{l}_0^{(1)} \cdot \vec{\nabla}')\,\varphi^{(0)} \quad \text{(potenciál elementárního kvadrupólu)} . \tag{95}$$

Praktickou realizací elementárního kvadrupólu je většina nepolárních molekul.

Analogickým postupem odvodíme multipól 2^n-tého řádu charakterizovaný svou velikostí $p^{(n)}$ a n směry $\vec{l}_0^{(1)}, \vec{l}_0^{(2)}, \ldots, \vec{l}_0^{(n)}$, mající potenciál

$$\varphi^{(n)} = \frac{p^{(n)}}{n!}\,(\vec{l}_0^{(n)} \cdot \vec{\nabla}')\,(\vec{l}_0^{(n-1)} \cdot \vec{\nabla}') \ldots (\vec{l}_0^{(1)} \cdot \vec{\nabla}')\varphi^{(0)} \quad \text{(potenciál elementárního } 2^n\text{-pólu)} . \tag{96}$$

Axiálním multipólem nazýváme takový, v jehož zápisu mají všechny vektory $\vec{l}_0^{(k)}$ stejný směr.

[17] Tady matematik právem namítne, že φ v rov. (93) je úplně jiná funkce než stejně značené φ v rov. (91) či (90); má pravdu, protože tyto funkce mají různou třetí proměnnou. Fyzik oponuje, že jde o totéž pole – tentýž potenciál; taky má pravdu. Společné řešení by bylo odlišit tyto funkce třeba čárkou nebo vhodným indexem apod. V praxi (ve fyzikální literatuře) se to nikdy nedělá a nechci to dělat ani zde, protože by to odtahovalo pozornost jinam: čtenář by se snadno mohl domnívat, že index rozlišuje různá pole a nikoli funkce sice různých proměnných, ale popisující totéž pole. Toto znáte ovšem i z mechaniky, kde např. E značilo energii, ať byla vyjádřena v jakýchkoli proměnných.