3 Elektrostatické pole

2017–09–07

V elektrostatice se zabýváme časově neproměnnými stavy. Látky můžeme rozdělit do dvou skupin:

- **vodič** obsahuje volné náboje;
- **nevodič** (izolátor, dielektrikum) neobsahuje volné náboje .

Rovnováha v rozložení nábojů se vždy ustaví natolik rychle, že přechodové jevy nestačíme sledovat a popisujeme tedy jen ustálené, statické stavy (kap. 1.4.6), nanejvýš kvazistatické děje (kap. 1.4.7).

Prakticky řečeno: jestliže na předmět v měřené úloze vložíme náboj, pak

- náboj se rozuteče dříve, než stihneme měřit: předmět je vodič;
- náboj po dobu měření zůstane, kam jsme ho dali: předmět je nevodič;
- náboj změní polohu během měření: úloha není elektrostatická.

Nezabýváme se **supravodičem**, jímž může téct elektrický proud bez odporu. Pro něj je typické $\rho = 0$ a $\vec{B} = \vec{0}$.

3.1 Vodič v poli – HRW 24-12 (25.11)

Připomeňme si základní vlastnost vodiče a její důsledky v elektrostatice: Uvnitř vodiče se mohou některé elektricky nabité částice (**volné náboje**) pohybovat na makroskopické vzdálenosti. Jsou to záporné *elektrony*, v polovodičích také kladné *díry* (což jsou „chybějící elektrony"), v tekutině (např. v roztoku) i *ionty* obou polarit – kladné i záporné. Z pohyblivosti volných nábojů plyne:

1. Volné náboje se rozloží tak, aby soustava měla minimální potenciální energii.
2. Uvnitř vodiče je potenciál konstantní a rovný potenciálu na povrchu.
3. Povrch vodiče je ekvipotenciální plochou ($\varphi = \mathsf{konst}$).
4. V dutině uvnitř vodiče je potenciál konstantní a elektrická intenzita nulová (stínění!).
5. Také uvnitř vodiče je elektrické pole nulové ($\vec{E} = \vec{0}$).
6. Volné náboje se rozloží (obecně nerovnoměrně) po vnějším povrchu vodiče. Hustota volných nábojů uvnitř vodiče je nulová.
7. Silokřivky jsou kolmé k vnějšímu povrchu vodiče.
8. Potenciál vně nabité konečné plochy S (se známým celkovým nábojem q) splňuje následující podmínky a je jimi jednoznačně určen:
   a) Vně S platí $\triangle\varphi = 0$
   b) Pro $r \to \infty$ klesá φ k nule alespoň jako $1/r$, tj. $\lim_{r\to\infty} r\varphi(r) < \infty$
   c) Na ploše S má φ konstantní (zatim neznámou) hodnotu
   d) $\oint_S \vec{\nabla}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -q/\varepsilon_0$

Z tvrzení 3 plyne, že se pole vytvořené např. soustavou nábojů a nabitých vodičů nezmění, jestliže do něj vložíme další vodič, mající tvar některé ekvipotenciální plochy (nebo její části), zajistíme-li, aby měl týž potenciál, jaký měla tato ekvipotenciální plocha. To nám usnadní řešení některých úloh na určení elektrostatického pole za přítomnosti nabitých vodičů.

3.2 Kapacita soustavy vodičů

3.2.1 Potenciálové koeficienty

Uvažujme nejprve jeden konečný vodič V, který nese volný náboj q a má potenciál φ; volíme $\varphi \to 0$ pro $r \to \infty$. Z podmínek jednoznačnosti potenciálu 8 a z principu superpozice plyne, že bude-li na vodiči náboj k-krát větší, bude i jeho potenciál k-krát větší.

Uvažujme dále soustavu n vodičů $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_n$, které mají potenciály $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a nesou volné náboje q_1, q_2, …, q_n. Podobně z principu superpozice plyne, že potenciály vodičů budou lineárními funkcemi nábojů na nich rozmístěných, tj.

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} q_k b_{ki} \quad . \tag{127}$$

Veličiny b_{ki} se nazývají **potenciálové koeficienty** této soustavy vodičů.

3.2.2 Kapacitní a influenční koeficienty

Vyřešíme-li soustavu danou rov. (127) vůči q_k, dostaneme opět lineární soustavu

$$q_k = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l c_{lk} \tag{128}$$

Veličiny c_{lk} se nazývají

- **kapacitní koeficienty** pro $l = k$;
- **influenční koeficienty** pro $l \neq k$.

3.3 Kondenzátor, kapacita – HRW 25 (26)

3.3.1 Zavedení kondenzátoru; označení

Soustava dvou vodičů 1, 2 taková, že všechny silokřivky vycházející z vodiče 1 končí na vodiči 2, se nazývá **kondenzátor**. V elektrických schématech ji značíme –||– . Vodičům se říká **elektrody**, často také (z historických důvodů) **desky** nebo **polepy** kondenzátoru.

Uvažujme jednoduchou situaci, kdy všechny silokřivky z 1 končí na 2 a také naopak, všechny silokřivky z 2 končí na 1. Pak mají nutně oba vodiče v absolutní hodnotě stejné náboje $+Q$, $-Q$. V této situaci řekneme, že kondenzátor je (jako celek) nabitý nábojem Q, neboli že nese náboj Q.

Věta „Kondenzátor nese náboj Q“ znamená, že jedna jeho deska nese náboj Q a druhá $-Q$.

$\hookleftarrow$ Zdánlivou výjimkou je osamocený vodivý předmět, třeba koule. Teorii statického pole a potenciálu je totiž nejlépe konzistentně vybudovat tak, že celkový náboj ve vesmíru je nulový: kolik „přebývá“ v naší sledované soustavě, tolik se pošle s opačným znaménkem do okolí, případně do nekonečna. Tam také putují příslušné „přebytečné“ silokřivky. Koule tvoří tedy kulový kondenzátor mající druhý „polep“ v nekonečnu jako nekonečně velkou vodivou kouli s nábojem doplňujícím do nuly vnitřní náboj sledované soustavy.

3.3.2 Kapacita kondenzátoru

Z principu superpozice je zřejmé, že kondenzátor nabitý nábojem Q ponese mezi deskami napětí U, které bude přímo úměrné náboji:

$$Q = CU \tag{129}$$

Součinitel úměrnosti C je daný konstrukcí kondenzátoru a nazývá se **kapacita** tohoto kondenzátoru.

Pozor: slovo „kapacita“ tu má jiný význam než třeba u nádob; je-li kapacita termosky 2 litry, pak se do ní prostě nevejde víc než 2 litry. Kapacita C kondenzátoru naproti tomu neomezuje, kolik náboje Q se do něj vejde, ale udává poměr, jak velké napětí U tento náboj na něm vyvolá. Stejně to bude (o hodně později v termodynamice) s tepelnou kapacitou; ta zase určí úměru mezi zvýšením teploty a teplem k tomu potřebným.

Jednotkou kapacity je zřejmě 1 C/V , coulomb na volt, a vyskytuje se tak často, že pro ni byl určen název: 1 C/V = 1 F, farad (podle M. Faradaye). Běžně užívané jednotky pro běžné kondenzátory jsou mikrofarad μF, nanofarad nF, pikofarad pF.

Pro praktický odhad: kulový kondenzátor výše zmíněný o poloměru koule $r = 1\,\mathrm{cm}$ má kapacitu asi 0,9 pF.

3.3.3 Výpočet kapacity obecně – HRW 25-3 (26.3)

Z definice intenzity a potenciálu plyne, že napětí mezi body A, B je rovno křivkovému integrálu

$$U = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{130}$$

Elektrická intenzita $\vec{E}$ souvisí s nábojem Q podle Gaussova zákona:

$$Q = \varepsilon_0 \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma} \qquad , \tag{131}$$

což umožňuje snadno vyřešit některé úlohy s velmi vysokou symetrií.

Uvažujme kondenzátor s rovinnými deskami. Za Gaussovu plochu vezmeme válec kolem jedné elektrody, o základně rovnoběžné s deskou a mající obsah S; je-li povrchová hustota náboje η, pak náboj $Q = \eta S$ uvnitř válce vytvoří tok Ψ intenzity $\vec{E}$ rovný ES, a tedy

$$\varepsilon_0 \Psi = \varepsilon_0 ES = Q \quad (= \eta S) \tag{132}$$

Integrál z rov. (130) z jedné desky kondenzátoru kolmo na druhou desku ve vzdálenosti d dává

$$U = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = Ed \tag{133}$$

a protože kapacita C je definována jako podíl $C = Q/U$, dostaneme dosazením pro kapacitu jednoduchý vztah

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{134}$$

- Opět se můžete přesvědčit, že jednotkou elektrické konstanty ε_0 je opravdu $[\varepsilon_0]$ = F/m, jak jsme uvedli v rov. (38).
- V praxi samozřejmě deska není nekonečná. Předpokládáme jen, že můžeme zanedbat nepravidelnosti pole u okrajů desky (rozptyl siločar).

3.3.4 Výpočet kapacity kulového kondenzátoru a osamocené koule

Z kap. 2.6.1 známe potenciál $\varphi(R)$ bodového náboje q a víme, že vně homogenně nabité koule s celkovým nábojem q je průběh potenciálu stejný; pro $\varphi(R) \to 0$ při $R \to \infty$ je podle rov. (59)

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad . \tag{135}$$

Tvoří-li tedy kondenzátor dvě soustředné koule o poloměrech a, $b > a$ a nese-li vnitřní koule náboj Q, pak bude mezi nimi napětí

$$U = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{a} - \frac{q}{b} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab} \tag{136}$$

a kapacita tohoto kondenzátoru je dána vztahem $Q = UC$, tedy

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad . \tag{137}$$

Pro jedinou kouli pak zřejmě platí limita $b \to \infty$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a \quad . \tag{138}$$

Kapcita osamocené koule je přímo úměrná jejímu poloměru a.

3.3.5 Výpočet kapacity válcového kondenzátoru

Podle kap. 2.7.1: v poli nabité přímky s nábojem Q na délku L (neboli s délkovou hustotou náboje $\tau = Q/L$) jsou ekvipotenciálními plochami souosé válce; podle rov. (82) je mezi válci o poloměrech a, $b > a$ napětí

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a} \tag{139}$$

a kapacita válcového kondenzátoru o délce L je

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln b - \ln a} \quad . \tag{140}$$

3.3.6 Zapojování kondenzátorů: seriové a paralelní – HRW 25-4 (26.4)

Zapojení paralelní neboli **vedle sebe** (obr. 25-8): na všech kondenzátorech je stejné napětí, tedy náboje na soustavě se sčítají, a z toho plyne

$$C = \sum_k C_k \qquad \text{zapojení paralelní} \tag{141}$$

Zapojení sériové neboli **za sebou**: –||–||–||– na všech kondenzátorech jsou stejné náboje Q, tedy $U = \sum_k U_k$, a proto

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k} \qquad \text{zapojení sériové} \tag{142}$$

Doplňme popravdě, že jsou i jiná zapojení, neredukovatelná na tyto dva prototypy (můstky, pentagon). Pro jejich výpočet nutno jednak poctivě vyřešit soustavu n lineárních rovnic pro n proměnných, viz Kirchhoffovy zákony, jednak předem vybrat tyto rovnice tak, aby nebyly lineárně závislé. Tím vším se mj. zabývá **teorie lineárních obvodů**, viz zmínka u kap. 4.9.

3.4 Energie soustavy nabitých vodičů – HRW 25-5 (26.5)

Nabitý kondenzátor má oproti nenabitému jistou elektrickou (elektrostatickou) energii. Je to zřejmé z toho, že k procesu nabíjení, tj. přenášení náboje z jednoho polepu kondenzátoru na druhý, je potřeba dodávat energii: mají-li už polepy náboje $\pm Q$ a je-li tedy mezi nimi již napětí $U = Q/C$, je pro přenos dalšího náboje dQ třeba dodat práci

$$đW = U \,\mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) \quad , \tag{143}$$

odkud plyne, že nabitý kondenzátor získal nabitím energii

$$E_{\mathrm{el}} = \int \mathrm{d}W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 \quad . \tag{144}$$

Podle nábojové představy je tato energie spojena s náboji (mají „vznešenější“ polohy).

Podle polní představy je energie naopak rozložena v poli mezi elektrodami, a to s hustotou, kterou dále odvodíme.

3.5 Energie elektrostatického pole; hustota energie – HRW 25-5 (26.5)

Připomeňme si situaci v deskovém kondenzátoru: mezi deskami o ploše S ve vzdálenosti d nabitými náboji $\pm Q$ je (zanedbáme-li okrajové jevy) homogenní elektrické pole a platí:

- $U = Ed$ je napětí na kondenzátoru;
- $Q = \varepsilon_0 ES$ je náboj podle Gaussova zákona
- $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ je kapacita kondenzátoru;

- $V = Sd$ je objem prostředí mezi polepy;
- $E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}CU^2$ je elektrická energie kondenzátoru

Odtud dostaneme dosazením celkovou energii

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd \tag{145}$$

a lze zavést hustotu energie jako

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{E_{\mathrm{el}}}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED \qquad \text{(hustota elektrické energie ve vakuu)} \tag{146}$$

Stejný postup při kondenzátorem s dielektrikem vede rovněž k výrazu

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}ED \qquad \text{(hustota elektrické energie v dielektriku)} \tag{147}$$