5 Stacionární magnetické pole – HRW 28, 29 (29, 30)

2016–12–01

5.1 Magnetické pole, jeho zdroje a účinky – HRW 28 (29)

5.1.1 Permanentní magnet

Vedle výhradně přitažlivé interakce gravitační se v makrosvětě setkáme s interakcí elektrickou (často zvanou elektrostatickou), která je přitažlivá i odpudivá, a magnetickou, která je podobně jako elektrická jak přitažlivá, tak odpudivá. Tuto vlastnost vykazují látky permanentně magnetické (**magnet**), např. přírodní minerál magnetovec, tvrdá ocel, umělé magnety – slitiny kovů Fe, Ni, Co, Gd, Mn, event. s dalšími příměsmi, ale i chemicky zcela odlišné látky, např. ferity. Jiné látky (měkké železo) vykazují podobné vlastnosti, ale jen v přítomnosti permanentních magnetů. Dosud jmenované látky nazýváme feromagnetické (**feromagnetikum**). Na ostatní látky má magnetické pole mnohem slabší vliv. Obecně jsou ze silnějšího magnetického pole vytlačovány (**diamagnetikum**), někdy je ale diamagnetismus překryt vlastnostmi paramagnetickými (**paramagnetikum**) a látka je do silnějšího magnetického pole vtahována.

Toto je velmi hrubá charakteristika. Teorie pevných látek vedle toho rozeznává (a zdůvodňuje) antiferomagnetismus (dvě stejně „vydatné“ opačně orientované feromagnetické mřížky v krystalu), ferimagnetismus (dvě různě „vydatné“ opačně orientované feromagnetické mřížky v krystalu) atd.

Podrobnější pozorování ukáže, že všechna tělesa s těmito vlastnostmi se chovají jako analogie nikoli elektrických nábojů, ale *dipólů*: nejjednodušší magnetickou strukturou je destička se **severním pólem** (S; angl. N) na jedné straně a jižním pólem (J; angl. S) na straně druhé. Stejné póly se odpuzují, opačné přitahují[19], na elektricky náboj, který je v klidu, magnet nepůsobí. Tyčový magnet se chová jako složený z takových destiček a nejde proto získat magnetické póly jeho rozlomením.

Podstatně později se zjistilo, že jako permanentní magnety se chovají i mnohé elementární částice mající spin, např. záporný elektron, i složené částice, např. kladný proton či neutrální neutron (oba jsou složené z nabitých kvarků).

5.1.2 Proudová smyčka

Zatímco magnety byly známy od pradávna (i to, že Země se také chová jako velký magnet, např. kompasy ze staré Číny nebo pojednání W. Gilberta z r. 1600), magnetické účinky elektrického proudu objevil až v r. 1820 dánský fyzik Hans Christian Ørsted (1777-1851, často přepisováno Oersted) a Ampère záhy na to (1822) popsal interakci dvou vodičů protékaných elektrickým proudem jako interakci magnetickou. Připomeňme, že homogenně zmagnetovaná kruhová destička budí stejné pole jako smyčka tvořená jejím obvodem a protékaná vhodně velkým elektrickým proudem.

5.1.3 Silové účinky magnetického pole. Magnetická indukce a intenzita

Vedle toho, že na sebe silově působí (v libovolných kombinacích) permanentní magnety i proudové smyčky, působí magnetické pole na pohybující se elektrický náboj, a to zásadně silou kolmou na jeho rychlost, tedy kolmou na okamžitý směr pohybu (1889 O. Heaviside, poté H. A. Lorentz, možná už i J. C. Maxwell 1865).

V duchu polního přístupu zavedeme k popisu interakce magnetická pole $\vec{H}$, $\vec{B}$. Bohužel, z historických důvodů[20] je terminologie obrácená, než bychom zvolili dnes, takže tato pole nazýváme **magnetická indukce** $\vec{B}$ a **magnetická intenzita** $\vec{H}$. Síla působící na bodový náboj q pohybující se rychlostí $\vec{v}$ je pak

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{163}$$

(viz rov. (20)), první člen se nazývá Coulombova síla, druhý Lorentzova síla. Odtud také plyne *jednotka* magnetické indukce 1 tesla, T, kde 1 T = N/(C·m/s) = N/(m·A). Dříve (v soustavě CGS) se užívala jednotka 1 gauss, 1 G = 10^{-4}T.

Jednotkou magnetické intenzity, jak bude zřejmé z rov. (191), je $[H]$ = A/m, ampér na metr.

Ve vakuu spolu souvisí magnetická indukce a intenzita vztahem $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, kde μ_0 je **magnetická konstanta**, dříve zvaná **permeabilita vakua**:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N \cdot m \cdot A^{-2}} \approx 1{,}256\,6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H/m} \tag{164}$$

[19] Připomeňme ze zeměpisu, že poblíž severního geografického pólu tedy leží fakticky jižní magnetický pól; nazývá se však z pochopitelných důvodů severním *geomagnetickým* pólem.

[20] podle analogie předpokládající magnetické monopóly k bodovým elektrickým nábojům

(Připomeňme, že elektrická a magnetická konstanta jsou s rychlostí světla ve vakuu spojeny vztahem $\varepsilon_0\mu_0c_0^2 = 1$.)

Síla působící na náboj je vždy kolmá ke směru jeho pohybu a nekoná tedy práci – nemění energii náboje, jen zakřivuje jeho dráhu.

Sílu působící na permanentní magnet a na vodič protékaný proudem v poli odvodíme později.

5.1.4 Pohyb nabité částice v magnetickém poli – HRW 28-6, 7 (29.5, 6)

Uvažujme pro jednoduchost částici kladně nabitou $q > 0$ (abychom nemuseli u velikostí ostatních veličin psát absolutní hodnoty) letící rychlostí $\vec{v}$ v magnetickém poli s indukcí $\vec{B}$.

Letí-li částice *podél* silokřivky $\vec{B}$, nepůsobí na ni od magnetického pole žádná síla, částice tedy pokračuje stálou rychlostí ve stejném směru dále.

Letí-li však *kolmo* k silokřivce, působí na ni síla o velikosti qvB kolmo ke směru pohybu. Tato síla však nedodává energii (velikost v rychlosti $\vec{v}$ částice se proto nemění). Je-li magnetické pole homogenní, bude se v něm částice pohybovat po kružnici o poloměru r takovém, aby dostředivá síla byla právě realizována Lorentzovou silou:

$$
\begin{aligned}
\frac{mv^2}{r} &= qvB && \text{a tedy} && (165)\\
r &= \frac{mv}{qB} && \text{poloměr kružnice} && (166)\\
T &= \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} && \text{doba oběhu} && (167)\\
\omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} && \text{úhlová frekvence} && (168)
\end{aligned}
$$

(tzv. **cyklotronová frekvence**).

Při obecném směru se částice pohybuje v magnetickém poli po šroubovici kolem silokřivky. Při dostatečném zhuštění silokřivek se náboj pohybuje po menších kružnicích a dá se dokázat, že má natolik menší stoupání, že od dostatečně velkého zesílení pole se bude po šroubovici odrážet (princip **magnetických nádob** neboli magnetických **pastí**).

5.1.5 Ampérova síla – HRW 28-8 (29.7)

Protože elektrický proud I souvisí s pohybem náboje vztahy

$$I = \int_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_S \rho\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \quad , \tag{169}$$

je zřejmé, že na elektrický proud I (přesněji: na přímý vodič délky L protékaný proudem o velikosti I) bude v magnetickém poli působit síla

$$\vec{F} = I\,\vec{L}\times\vec{B} \quad , \tag{170}$$

kde vektor $\vec{L}$ má velikost L a směr podél vodiče ve směru toku proudu. V diferenciálním tvaru – pro infinitezimální úsek $\mathrm{d}\vec{r}$ vodiče – má tato **Ampérova síla** tvar

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B} \qquad \text{(Ampérova síla).} \tag{171}$$

5.1.6 Proudová smyčka – HRW 28-9, 10 (29.8, 9)

(Obr. 28(29)-21 a 28(29)-22.) V homogenním magnetickém poli $\vec{B}$ ve směru osy x leží obdélníková smyčka o délce a ve směru osy y a šířce b v rovině xz pod úhlem θ k rovině yz, protékaná proudem I, otáčivá kolem osy symetrie smyčky ve směru osy y. Smyčka má obsah $S = ab$. Na její i-tou stranu působí síla $\vec{F_i}$ kolmá k této straně a ležící v rovině yz (tedy kolmo k $\vec{B}$). Je-li smyčka pevná, pak se síly na šířky b navzájem vyruší, ale síly působící na délky a mají obecně různá umístění x, a proto vytvářejí silovou dvojici (s ramenem b) působící na smyčku momentem síly $\vec{M}$ o velikosti

$$M = IabB\sin\theta = ISB\sin\theta \tag{172}$$

hledícím stočit smyčku do polohy s $\theta = 0$ (tj. do roviny yz kolmé k poli $\vec{B}$).

Je-li takových navzájem rovnoběžných smyček N, bude výsledná síla N-krát větší, tedy

$$M_N = (NIS)B \sin\theta \tag{173}$$

kdy veličiny v závorce jsou konstanty dané konstrukcí cívky. Na tomto principu pracovaly analogové galvanoměry měřící (neznámý) proud I cívkou (než je vytlačily digitální měřidla) a jsou i podstatou elektromotorů (tam je potřeba zajistit, např. setrvačností, přeběhnutí „mrtvé“ polohy s $\theta = 0$ a současně změnit orientaci proudu I cívkou).

Z tohoto hlediska se zkoumaná cívka chová jako obdélníkový permanentní magnet mající **magnetický moment** $\vec{m}$ se směrem v ose cívky a s velikostí

$$m = NIS \qquad \text{(magnetický moment)} \tag{174}$$

s jednotkou $[m] = 1\,\mathrm{A{\cdot}m^2}$ a rov. (173) můžeme vektorově zapsat tvarem

$$\vec{M}_N = \vec{m} \times \vec{B} \tag{175}$$

podobně jako moment síly, kterým působilo elektrické pole na elektrický dipól. Analogicky odvodíme potenciální energii magnetického dipólu ve vnějším magnetickém poli jako

$$E_\mathrm{p} = -\vec{m} \cdot \vec{B} \tag{176}$$

odkud je zřejmý i jiný zápis *jednotky magnetického momentu*

$$[m] = 1\,\mathrm{A{\cdot}m^2} = 1\,\mathrm{J/T} \tag{177}$$

♣ Teď asi rozumíte, proč jsme jako elementární magnet volili raději magnet destičkový než tyčový.

5.2 Magnetické pole elektrického proudu ve vakuu – HRW 29 (30)

5.2.1 Biotův-Savartův zákon – HRW 29-2 (30.1)

Vzorec pro magnetické pole $\vec{B}$ elekrického proudu „navrhneme“ analogicky jako vzorec pro elektrické pole elektrického náboje, jen s pár potížemi:

1. půjde o vektorový proudový element $\mathrm{d}\vec{I} = I\mathrm{d}\vec{r}'$, nikoli o skalární element náboje $\mathrm{d}q'$;
2. zatímco elementární náboj je fyzikálně přijatelný, je elementární proudový element lehce obskurní (odkud teče a kam?). Ale nějak to zvládneme (vždycky ho nakonec zintegrujeme podél uzavřené smyčky);
3. z historických důvodů (analogie magnetu a elektretu) jsou prohozeny názvy polí $\vec{B}$ a $\vec{H}$. Pole $\vec{B}$ by se mělo jmenovat „magnetická *intenzita*“, protože přímo určuje sílu. Jeho vlivem se také magnetikum mění a indukuje se v něj magnetická polarizace. Přesto se nazývá magnetickou *indukcí*.

Jako přijatelný se pro magnetické pole ve vakuu jeví tvar analogický Coulombovu zákonu rov. (39); (to μ_0 by vlastně patřilo jinam, a to k $\vec{H}$ do vztahu $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ ve vakuu)

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\ \mathrm{d}\vec{r}' \times \vec{R}^0}{R^2} \qquad \text{(Biotův-Savartův zákon)} \tag{178}$$

s obvyklým $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$ a jednotkovým vektorem $\vec{R}^0$; HRW namísto našeho $\vec{r}'$ užívá s.

5.2.2 Magnetické pole přímého vodiče NRW 29-2

Napravíme potíž 2 z minulého odstavce tím, že spočteme magnetické pole nekonečného přímého vodiče v ose x (proud přichází z nekonečna a do nekonečna se taky vrací, což taky není zrovna ideální, ale pořád lepší než odnikud nikam). Pole zřejmě bude záviset jen na vzdálenosti r od osy x a stačí ho určit na ose z; bude mít směr y a velikost

$$|\vec{B}(\vec{r})| = \left|\int \mathrm{d}\vec{B}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\mathrm{d}\vec{r}' \times \vec{R}}{R^3}\right| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\mathrm{d}x}{(x^2+z^2)^{3/2}}\right| \tag{179}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi|z|}\left[\frac{x}{(x^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty} \tag{180}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi|z|} \quad \text{(mg. pole na ose z, buzené přímým vodičem ležícím v ose x)} \tag{181}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{(mg. pole přímého vodiče ve vzdálenosti } r \text{ od vodiče)} \tag{182}$$

Směr indukčních čar plyne z vektorového součinu a lze ho tedy popsat pravidlem pravé ruky:

Položíme-li palec pravé ruky ve směru toku proudu, ukazují zahnuté prsty směr magnetických indukčních čar.

5.2.3 Síla mezi rovnoběžnými vodiči protékanými proudem – HRW 29-3 (30.2)

Ze známého magnetického pole $\vec{B}$ jednoho vodiče (rov. (182)) a ze známé síly (rov. (170)) působící na druhý vodič ve známém magnetickém poli $\vec{B}$ určíme i směr, i velikost síly působící na rovnoběžné vodiče protékané proudem:

Dva rovnoběžné vodiče ve vzdálenosti d protékané proudy I_1 a I_2 se při stejné *orientaci proudů přitahují, při* opačné *se odpuzují. Velikost síly na délku L je rovna*

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \tag{183}$$

5.2.4 Pole závitu, cívky, toroidu – HRW 29-3, 5, 6 (30.4, 5)

Pole *uprostřed* závitu cívky spočítáme snadno:

$$B = \oint_\Gamma \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{R} \tag{184}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \text{(pole ve středu kruhové smyčky)} \tag{185}$$

Má-li **solenoid** (dlouhá, hustě vinutá cívka s délkou L podstatně větší než poloměr R) N závitů protékaných proudem I, bude pole uvnitř homogenní. Šlo by ho ovšem rovněž spočíst integrací (princip superpozice), ale mnohem jednodušeji dostaneme záhy z Ampérova zákona vztah

$$B = \mu_0 I\, n \qquad \text{(pole v solenoidu)} \tag{186}$$

kde $n = N/L$ je počet závitů na jednotku délky. Solenoid umožňuje jednoduše vytvořit celkem homogenní magnetické pole.

Stočením solenoidu do kružnice (prstenec, „pneumatika“) dostaneme **toroid**, důležitý např. při návrhu „nádoby“ na vysokoteplotní plazmu tvořenou rychlými nabitými částicemi (např. TOKAMAK = rus. toroidaľnaja magnitnaja katuška). Opět z Ampérova zákona dostaneme celkem snadno, že pole uvnitř toroidu o celkovém počtu závitů N (mírně) klesá se vzdáleností r od středu toroidu podle vzorce

$$B = \frac{\mu_0 I \; N}{2\pi \; r} \qquad \text{(pole v toroidu)} \tag{187}$$

a vně ideálního toroidu je magnetické pole nulové: $B = 0$.

5.3 Ampérův zákon ve vakuu. Intenzita magnetického pole – HRW 29-4 (30.3)

Podobně jako je Coulombův zákon (určení pole známého náboje) ekvivalentní Gaussovu zákonu (určení náboje ze známého pole), je i Biotův-Savartův zákon ekvivalentní **Ampérovu zákonu**:

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I_\Sigma \tag{188}$$

kde I_Σ je úhrnný proud protékající plochou Σ, která má za hranici smyčku Γ. Orientaci určí **Ampérovo pravidlo pravé ruky**:

Ukazují-li prsty sevřené pravé ruky ve směru silokřivek $\vec{B}$ podél Ampérovy křivky, pak palec ukazuje kladný směr elektrického proudu.

Zavedeme další pole, magnetickou intenzitu $\vec{H}$, ve vakuu vztahem

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{189}$$

a tím dostaneme vztahy pro pole v solenoidu

$$H = In \tag{190}$$

a Ampérův a Biotův-Savartův zákon

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; I \qquad \text{(Ampér)} \tag{191}$$

$$\mathrm{d}\vec{H} \;=\; \frac{1}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}\vec{r}\,' \times \overrightarrow{R^0}}{R^2} \qquad \text{(Biot, Savart)} \tag{192}$$

5.4 Ampérův zákon v látkovém prostředí – HRW 32-3, 32-4

Podobně jako v elektrickém poli, chceme i v magnetickém poli oddělit zdroje magnetického pole námi řízené od spontánních či indukovaných zdrojů magnetického pole přítomných už „od narození“ v látkovém prostředí. Mikroskopický rozbor je zde mnohem složitější a méně názorný než u (prostých) elektrických nábojů a dipólů, přesto celkový výsledek lze zapsat analogicky.

Z elektrického hlediska stačilo k elektrické intenzitě $\vec{E}$ doplnit jako charakteristiku látky pole elektrické polarizace $\vec{P}$. S definičním vztahem $\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ pak bylo pole v elektrostatice popsáno rovnicemi $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{E} = 0$ a $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$.

(Ve vakuu bylo $\vec{D} = \vec{0}$, v častém případě lineárního „měkkého“ dielektrika existoval materiálový parametr χ, elektrická susceptibilita, takový, že $\vec{P} = \chi \vec{E}$, takže stačilo zavést permitivitu $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi)$ a pak pro dvě klíčová pole, tj. elektrickou intenzitu $\vec{E}$ a indukci $\vec{D}$ platilo prostě $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.)

Analogicky se ukazuje, že z magnetického hlediska stačí k magnetické indukci $\vec{B}$ doplnit jako charakteristiku látky pole **magnetické polarizace** $\vec{J}_\mathrm{m}$, resp. **magnetizaci** $\vec{M} = \vec{J}_\mathrm{m}/\mu_0$. S definičním vztahem $\vec{H} := \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ (neboli $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$) pak bude magnetické pole v látce (zatím) popsáno rovnicemi $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \vec{H} = \vec{J}$ a $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ a rov. (191), (192) budou platit i v látkovém prostředí.