7 Nestacionární elektromagnetické pole

2016−12−08

Nestacionární pole je nejobecnějším typem elektromagnetického pole. V něm se již projeví konečná rychlost šíření světla (tj. elmg. vln) a z ní plynoucí důsledky.

7.1 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice spojují elektromagnetické pole a jeho zdroje. Tvoří soustavu vektorových lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Uvádíme-li polní veličiny na levé straně a zdroje na pravé, mají Maxwellovy rovnice uvnitř zkoumané oblasti V tvar:

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} = \vec{J}_{\mathrm{vt}} + \sigma\vec{E} \qquad \text{(první série Mxw. r.)} \tag{205}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{206}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \qquad \text{(druhá série Mxw. r.)} \tag{207}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{208}$$

První série je tedy obecně nehomogenní, druhá série je vždy homogenní díky neexistenci magnetických nábojů a proudů.

Aby se zachovával elektrický náboj (viz kap. 2.1; 7.2.1), musejí zdroje (náboje a proudy na pravé straně první série) vyhovovat *rovnici kontinuity* 4.3:

$$\operatorname{div}\ \vec{J} + \partial_t\rho = 0. \tag{209}$$

7.1.1 Okrajové podmínky

K diferenciálním rovnicím patří nezbytně i okrajové podmínky (počáteční a okrajové). Na hranici ∂V (resp. při přechodu přes ni) splňuje pole podmínky, které můžeme zapsat výhodně ve tvaru analogickém Maxwellovým rovnicím, jestliže zavedeme

plošnou divergenci Div jako skok normálových složek vektoru na rozhraní: $\operatorname{Div}\vec{v} \equiv v_{\mathrm{n}1} - v_{\mathrm{n}2}$ (případně skok 1D-průmětu vektoru do přímky kolmé k rozhraní)

plošnou rotaci $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}$ jako skok tečných složek vektoru na rozhraní: $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{v} \equiv v_{\mathrm{t}1} - v_{\mathrm{t}2}$ (skok 2D-průmětu vektoru do roviny tečné k rozhraní):

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \vec{H} \equiv \vec{H}_{\mathrm{t}1} - \vec{H}_{\mathrm{t}2} = \vec{i} \tag{210}$$

$$\operatorname{Div}\ \vec{D} \equiv D_{\mathrm{n}1} - D_{\mathrm{n}2} = \eta \tag{211}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \vec{E} \equiv \vec{E}_{\mathrm{t}1} - \vec{E}_{\mathrm{t}2} = \vec{0} \tag{212}$$

$$\operatorname{Div}\ \vec{B} \equiv B_{\mathrm{n}1} - B_{\mathrm{n}2} = 0. \tag{213}$$

♣ Plošnou rotaci píšeme vektorově $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}$, je to 2D vektor. Plošnou divergenci píšeme obyčejně Div, i když by šlo zdůvodnit i vektorové psaní: fakticky jde o rozklad (skoku) 3D vektoru na 1D a 2D.

¿? Proč se rozdíly tečných resp. normálových složek pole na obou stranách plochy nespojitosti označují jako plošná rotace $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}$ resp. plošná divergence Div? Odp. je na str.47.

¿? Proč v rov. (210) a rov. (212) není člen analogický časové derivaci? Odp. je na str.47.

¡! Odp. ze str.47: WWW

¡! Odp. ze str.47: WWW

¡! Odp. ze str.53: Zdroj takto popsaný nevyhovuje rovnici kontinuity: vznikne a vzápětí zanikne. Je to ale jen mezivýsledek. Skutečné zdroje z něj vytvoříme tak, že budou rovnici kontinuity vždy vyhovovat.

7.2 Zákony zachování, rovnice kontinuity

7.2.1 Náboj

Zopakujme: z Maxwellových rovnic plyne omezení na možné typy zdrojů, tj. elektrických nábojů a proudů: musejí splňovat rovnici kontinuity. Pokud totiž na Maxwellových rovnicích

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H} - \partial_t\vec{D} = \vec{J} \qquad (205)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \qquad (206)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \vec{0} \qquad (207)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad (208)$$

provedeme operace div(205) + ∂_t(206), dostáváme přímo rovnici kontinuity pro elektrický proud:

$$\operatorname{div}\vec{J} + \partial_t\rho = 0 \qquad (4.3),$$

protože $\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{V} = 0$ pro libovolný vektor $\vec{V}$.

7.2.2 Energie

V elektrostatice jsme rozborem procesu nabíjení kondenzátoru zjistili, že v elektricky měkkém lineárním homogenním prostředí energie rozložená spojitě s hustotou

$$u_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \qquad (214)$$

(tedy „nesedí na nábojích“, ale naopak je rozložena v poli kolem nich). Analogický výraz

$$u_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \qquad (215)$$

vyjadřuje hustotu magnetické energie v magneticky měkkém lineárním prostředí a získáme ho rozborem průchodu elektrického proudu cívkou při vytváření magnetického pole.

Proveďme nyní s Maxwellovými rovnicemi operaci

$$-\vec{E}\cdot(205) + \vec{H}\cdot(207)$$

a použijme linearit, tj. $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu$. Pak lze výsledek s uvážením identity

$$\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{H}$$

zapsat ve tvaru

$$\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) + \partial_t\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = -\vec{J}\cdot\vec{E}. \qquad (216)$$

První člen bude mít význam „odtoku“ energie, jestliže výraz

$$\vec{S} = (\vec{E}\times\vec{H}) \quad \text{(Poyntingův vektor)} \quad , \qquad (217)$$

zvaný **Poyntingův vektor**, budeme interpretovat jako hustotu toku elektromagnetické energie. (Integrací rov. (216) přes objem V pomocí Gaussovy věty přejde tento výraz na tok energie hranicí ∂V oblasti V.) Druhý člen má, jak již víme, význam časové změny hustoty u elektromagnetické energie v poli. Výraz na pravé straně odpovídá hustotě $\mathcal{Q}$ energie Joulova tepla vyloučeného při průchodu elektrického proudu prostředím s konečnou vodivostí:

$$\vec{J}\cdot\vec{E} = \vec{J}^2/\gamma, \qquad (218)$$

značíme-li zde γ vodivost prostředí. Rov. (216) tím dostává tvar

$$\operatorname{div}\vec{S} + \partial_t u = -\mathcal{Q}, \qquad (219)$$

což je diferenciální tvar zákona zachování energie, opět vyjádřený formou rovnice kontinuity.

7.3 Potenciály

7.3.1 Vektorový potenciál

Podle analogie s elektrostatikou (starší pohled) by elektrické indukci $\vec{D}$ odpovídala magnetická indukce $\vec{B}$; nulovost její divergence (poslední z Maxwellových rovnic, rov. (12))

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad , \tag{220}$$

vyjadřovala neexistenci magnetického náboje. Z této rovnice novější pojetí vychází, ale bere ji hlouběji. Z jednoznačného určení pole jeho divergencí, rotací a okrajovými podmínkami lze dokázat, že k poli $\vec{B}$, pro něž platí rov. (220), existuje pole $\vec{A}$ zvané **vektorový potenciál** takové, že platí

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} \quad \text{(vektorový potenciál)} \tag{221}$$

U vektorového potenciálu je volnost podstatně větší, než byla u skalárního: je určen až na gradient libovolné funkce $\lambda(\vec{r})$, tzn., je-li nějaká funkce $\vec{A}(\vec{r})$ vektorovým potenciálem pole $\vec{B}(\vec{r})$, pak i funkce

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda(\vec{r}) \tag{222}$$

je vektorovým potenciálem téhož pole, neboť pro libovolnou funkci $\lambda(\vec{r})$ platí, že $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda = \vec{0}$.

Tato volnost nám umožní u složitějších úloh zvolit potenciály φ a $\vec{A}$ vhodnou **cejchovací** (též **kalibrační**) **transformací** tak, aby nové potenciály měly např. vyšší symetrii nebo jiným způsobem napomáhaly k řešení a k interpretaci výsledku.

7.3.2 Skalární potenciál

Připomeňme, že v elektrostatickém poli byla intenzita $\vec{E}_{\rm st}$ nevírová, a proto existoval potenciál φ:

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E}_{\rm st} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\rm st} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi_{\rm st} \quad . \tag{223}$$

Ten byl určen jednoznačně až na konstantu φ_0, tj. potenciál φ', kde

$$\varphi'_{\rm st}(\vec{r}) = \varphi_{\rm st}(\vec{r}) + \varphi_0 \quad , \tag{224}$$

dával tutéž intenzitu $\vec{E}_{\rm st}$.

V nejobecnějším případě nestacionárního pole však platí (předposlední z Maxwellových rovnic, rov. (11)

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} \;=\; \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A} \;=\vec{0}\text{ , tedy} \tag{225}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{E} + \partial_t\vec{A}) \;=\; \vec{0} \quad , \tag{226}$$

a lze proto zavést **skalární potenciál** $\varphi(\vec{r},t)$ takový, že

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi - \partial_t\vec{A} \quad . \tag{227}$$

Analogicky jako u skalárního potenciálu známého z elektrostatiky je i zde tento potenciál určen jednoznačně až na aditivní funkci času $\varphi_0(t)$, nikoli však souřadnic.

Namísto 6 složek 2 vektorových polí tedy stačí hledat jen 4 funkce, a to 1 skalarní potenciál $\varphi(\vec{r},t)$ a 3 složky vektorového potenciálu $\vec{A}(\vec{r},t)$.

Skalární potenciál takto definovaný lze zavést v libovolném, i nestacionárním elmg. poli a bude (až na funkci $\varphi_0(t)$ závislou na čase, nikoli však na souřadnicích) určen jednoznačně. To nám umožňuje zavést jednoznačně i v tomto nejobecnějším případě napětí $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ mezi libovolnými 2 body $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ v tomtéž čase t.

Méně náročné praktické či technické příručky často popisují potenciál v jiném než statickém poli nejasně, a pokud zavádějí obecně napětí, bývá to komplikovaně a chybně. Neuvažují vektorový potenciál, upozorňují jen na to, že napětí, které by bylo definováno křivkovým integrálem z $\vec{E}$, bude záviset na integrační dráze Γ.

7.4 Rovinná elektromagnetická vlna

7.5 Vlnová rovnice

Postup: Dosadíme do Maxwellových rovnic pro $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ potenciály $\vec{A}, \varphi$. Dále z této soustavy spřažených diferenciálních rovnic 1. řádu dostaneme samostatné rovnice 2. řádu, vždy jen pro jednu proměnnou.

Předpokládejme pro jednoduchost $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu$, $\sigma = 0$ tedy homogenní izotropní lineární a nevodivé [22] prostředí. Zapišme první sérii s dosazením za $\vec{D}, \vec{H}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{B} - \mu\varepsilon\partial_t\vec{E} &= \mu\vec{J} \qquad \text{(vynásobeno } \mu) &(228)\\ \operatorname{div}\vec{E} &= \rho/\varepsilon \qquad \text{(vyděleno } \varepsilon) &(229)\\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} + \partial_t\vec{B} &= \vec{0} &(230)\\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 &(231)\end{aligned}$$

a postupujme „od konce“: z rov. (231) plyne ihned

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A}\ , \tag{232}$$

což dosadíme do rov. (230) a „vytkneme“ rotaci:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,(\vec{E} + \partial_t\vec{A}) &= \vec{0} \quad \text{, odkud} &(233)\\ \vec{E} &= -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi - \partial_t\vec{A} &(234)\end{aligned}$$

Oba vztahy dosadíme do rov. (229), (228):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{A}\ + \partial_t\varepsilon\mu(\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi + \partial_t\vec{A}) &= \mu\vec{J} &(235)\\ -\operatorname{div}\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi - \operatorname{div}\partial_t\vec{A} &= \rho/\varepsilon &(236)\end{aligned}$$

V rov. (235) dosadíme za rot rot a roznásobíme:

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\operatorname{div}\vec{A}\ - \triangle A\ + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varepsilon\mu\partial_t\varphi + \varepsilon\mu\partial_t^2\vec{A} = \mu\vec{J} \tag{237}$$

změníme znaménko a přerovnáme:

$$\triangle A\ - \varepsilon\mu\partial_t^2 A\ - \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,(\operatorname{div}\vec{A}\ + \varepsilon\mu\partial_t\varphi) = -\mu\vec{J} \tag{238}$$

V rov. (236) změníme znaménko, dosadíme div grad $= \triangle$ a přičteme a odečteme člen $\varepsilon\mu\partial_t^2\varphi$:

$$\triangle\varphi - \varepsilon\mu\partial_t^2\varphi + \partial_t(\operatorname{div}\vec{A}\ + \varepsilon\mu\partial_t\varphi) = -\rho/\varepsilon \tag{239}$$

V obou posledních rovnicích je v závorce týž člen. V dalším ukážeme, že existuje taková cejchovací transformace, po které je tento člen roven nule, takže rovnice po zavedení $\varepsilon\mu = v^{-2}$ získají tvar

$$\begin{aligned} (\triangle - \varepsilon\mu\partial_t^2)\vec{A}\ = (\triangle - \partial_{vt}^2)\vec{A} &= -\mu\vec{J} &(240)\\ (\triangle - \partial_{vt}^2)\varphi &= -\rho/\varepsilon &(241)\\ (\triangle - \partial_{vt}^2)\vec{B} &= -\mu\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{J} &(242)\\ (\triangle - \partial_{vt}^2)\vec{E} &= \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\rho/\varepsilon + \mu\partial_t\vec{J}\quad . &(243)\end{aligned}$$

Tyto rovnice se nazývají ***vlnové rovnice***; jejich obecný tvar je zřejmě

$$(\triangle - \partial_{vt}^2)\ \text{(pole)} = -\ \text{(zdroj)} \tag{244}$$

Ve vakuu je $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ a $v = c$; v tom případě zavádíme **d'Alembertův** operátor $\square = (\triangle - \partial_{ct}^2)$.

[22] Vodivost $\sigma \neq 0$ dodá prostřednictvím Ohmova zákona $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ do (budoucí) vlnové rovnice člen s první derivací podle času; ten zachycuje pohlcování a tím útlum vln, analogicky tlumeným kmitům z mechaniky. Zde, v omezením rozsahu, bohužel není na tuto problematiku místo.

7.5.1 „Vhodná“ cejchovací transformace

Hledejme podle cejchovací transformace

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda \tag{245}$$

takové λ, aby po dosazení vymizel člen $(\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\partial_t\varphi)$ v závorce obou rov. (238), (239).

Chceme tedy zjistit, zda je pro libovolná $\vec{A}, \varphi$ řešitelná rovnice

$$\operatorname{div}(A + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda) + \varepsilon\mu\partial_t\varphi = 0 \tag{246}$$

Tato rovnice však dává rovnici

$$\triangle\lambda = -(\operatorname{div} A + \varepsilon\mu\partial_t\varphi) \tag{247}$$

a o Poissonově rovnici $\triangle\lambda = -\rho$ víme, že má řešení pro každou funkci ρ.

7.6 Řešení vlnové rovnice

7.6.1 Obecně

Vlnová rovnice (244), např. $\Box f = -\rho$, je lineární diferenciální rovnice 2. řádu s pravou stranou. Její obecné řešení f získáme ve třech krocích:

- nalezneme nezávislá řešení f_1, f_2 homogenní rovnice;
- uhádneme jedno řešení f_n nehomogenní rovnice;
- nejobecnější řešení f je dáno vztahem $f = f_\mathrm{n} + C_1 f_1 + C_2 f_2$ pro libovolné konstanty $C_1.C_2$.

7.6.2 Řešení homogenní rovnice

Homogenní vlnová rovnice

$$\Box\varphi = (\triangle - \partial_{ct}^2)\varphi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \partial_{ct}^2)\varphi = 0 \tag{248}$$

představuje pole beze zdrojů, tedy záření. Nedá mnoho práce nalézt její řešení. V jednorozměrném případě se nám úloha zjednoduší na tvar

$$(\partial_x^2 - \partial_{ct}^2)\varphi = (\partial_x + \partial_{ct})(\partial_x - \partial_{ct})\varphi = 0 \tag{249}$$

resp. při zavedení $r = x - ct$; $s = x + ct$

$$\partial_r\partial_s\varphi = 0 \tag{250}$$

s jednoduchým řešením

$$\varphi(r, s) = f_r(r) + f_s(s) \tag{251}$$

pro libovolné funkce f_r, f_s příslušných proměnných, neboli

$$\varphi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{252}$$

pro libovolné funkce f_1, f_2. První představuje vlnu šířící se rychlostí o velikosti c ve směru osy x, druhá vlnu šířící se toutéž rychlostí opačným směrem.

Ve 3D případě je zřejmě řešením soubor vln šířících se v libovolném směru rychlostí $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

7.6.3 Fourierova transformace

Jestliže $\mathcal{E}(t) = \int E(\omega)e^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\omega$ (Fourierova transformace), pak $E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{E}(t)e^{-\,\mathrm{i}\,\omega t'}\mathrm{d}t'$ (inverzní Fourierova transformace).

Kmity typu $E(\omega)e^{\mathrm{i}\,\omega t}$ nazýváme *monofrekvenčními* (o frekvenci ω resp. $f = \omega/2\pi$).

Zřejmě platí $\partial_t\mathcal{E}(t) = \mathrm{i}\,\omega\int E(\omega)e^{\mathrm{i}\,\omega t}\mathrm{d}\omega$, takže Fourierova transfomace převádí derivaci podle t na násobení ω, a analogicky zvládneme i derivace podle prostorových souřadnic, jak záhy uvidíme.

7.6.4 Světlo obecně

Viditelné světlo je elektromagnetické vlnění s frekvencemi $\omega \approx (2,5 \text{ až } 4,5)\cdot 10^{15}$ Hz, tj. s vlnovými délkami $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega \approx (0,4 \text{ až } 0,7)\cdot 10^{-6}$ m. Světlo s frekvencemi jen v úzkém oboru nazýváme *monochromatické* ($\tau\acute{o}$ $\chi\rho\tilde{\omega}\mu\alpha$ barva).
Barva světla: červená cca do 0,63 μm; žlutá 0,59 μm; zelená 0,55 μm; modrá pod 0,5 μm.

7.6.5 Světlo ve vakuu

Rovinná monofrekvenční vlna s vlnovým vektorem $\vec{k}$ a (kruhovou) frekvencí ω má tvar

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t,\vec{k},\omega) &= E_0\vec{e}_E \exp \mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \equiv E_0\vec{e}_E \exp \mathrm{i}\,\omega\Big(t - \frac{\vec{s}\cdot\vec{r}}{c}\Big)\\ \vec{H}(\vec{r},t,\vec{k},\omega) &= H_0\vec{e}_H \exp \mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\end{aligned}$$

Z nich složíme libovolné pole $\mathcal{E}(\vec{r},t) = \int\int \vec{E}(\vec{r},t,\vec{k},\omega)\ \mathrm{d}\vec{k}\ \mathrm{d}\omega$.
Maxwellovy rovnice po dosazení rovinné monofrekvenční vlny ve vakuu beze zdrojů, s uvážením $|\vec{k}|c = \omega$ a se zavedením jednotkového vektoru $\vec{k}/|\vec{k}| = \vec{k}_0$ dostávají tvar

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\mathcal{B}/\mu_0 - \partial_t\varepsilon_0\mathcal{E} &= \vec{0} &&\Rightarrow & \vec{k}_0\times\vec{B}/c + \vec{E} &= \vec{0}\\ \mathrm{div}\,\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} &= 0 &&\Rightarrow & \vec{k}_0\cdot\vec{E} &= 0\\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\mathcal{E} + \partial_t\mathcal{B} &= \vec{0} &&\Rightarrow & \vec{k}_0\times\vec{E} - c\vec{B} &= \vec{0}\\ \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{B}} &= 0 &&\Rightarrow & \vec{k}_0\cdot\vec{B} &= 0\end{aligned}$$

odkud plyne

$$\begin{gathered}\vec{E} = -\vec{k}_0\times c\vec{B}; \qquad \vec{B} = \vec{k}_0\times\vec{E}/c; \qquad \vec{e}_E \perp \vec{k}_0 \perp \vec{e}_H \perp \vec{e}_E\\ B = E/c \qquad \sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H = B/\sqrt{\mu_0}\end{gathered}$$

Světlo se tedy šíří ve směru $\vec{k}_0$ jako příčná vlna.

Hustota energie: $u = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = \varepsilon_0 E^2$; $\langle u\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}B_0^2/\mu_0$.
Hustota elektrické i magnetické energie jsou tedy stejné!
Tok energie: $|\vec{N}| = \langle u\rangle\, c$.

Skutečné světlo lze popsat jako částečně koherentní směs monofrekvenčních vln různých frekvencí, fázových posuvů, amplitud, směrů a polarizací.

7.6.6 Světlo v látce

Pro $\omega \to \infty$ je $\varepsilon_{\mathrm{rel}} \to 1, \mu_{\mathrm{rel}} \to 1, n \to 1$. Pro světelné frekvence je již $\mu(\omega) = \mu_0$ prakticky pro všechny látky; zůstává však ještě $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$.
Rychlost šíření světla $v = v(\omega) = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} \equiv c/n$, kde $n(\omega) \equiv c/v = \sqrt{\varepsilon\mu}/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{rel}}}$.

Disperze $n = n(\omega)$, tedy různá rychlost světla pro různé frekvence. Podle klasické teorie se látka chová jako N_k oscilátorů o frekvencích ω_k a platí $n^2(\omega) - 1 = \sum_k N_k/(\omega_k^2 - \omega^2)$. Kvantové jevy umožní i N_k necelé, i $N_k < 0$ (*anomální disperze*).

7.7 Homogenní rovnice: kulová vlna

O homogenní rovnici

$$\Box\varphi(\vec{r},t) = 0 \tag{253}$$

již víme, že má za řešení „vlny“, tedy signály tvaru

$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha_0) \tag{254}$$

šířící se ve směru vlnového vektoru $\vec{k}$ rychlostí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}. \tag{255}$$

Okrajové podmínky vyberou vhodné řešení jakožto kombinaci těchto vln s různými amplitudami f_0, fázovými konstantami α_0, vlnovými vektory $\vec{k}$ a s frekvencemi ω určenými podmínkou 255.

Nyní však hledáme řešení, preferující nikoli nějaký směr, ale bod — *kulovou vlnu*, která z tohoto bodu, ze svého zdroje, vychází na všechny strany (anebo se do něj sbíhá). Umístíme-li pro jednoduchost počátek souřadnic do tohoto zdroje, pak vlna, šířící se ze zdroje radiálně rychlostí c, má tvar

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\,\mathcal{F}(\Phi) = \frac{1}{r}\,\mathcal{F}(t \mp \frac{r}{c} - t_0), \tag{256}$$

kde $\mathcal{F}$ je libovolná funkce, její argument $\Phi \equiv t \mp \frac{r}{c} - t_0$ je *fáze*, t je čas, $r = |\vec{r}|$ je vzdálenost od zdroje, c je rychlost světla a t_0 libovolná konstanta (*počáteční fáze*).

¿? Ověřte, že libovolná funkce $\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{r}\mathcal{F}(t \mp \frac{r}{c})$ vyhovuje pro $r > 0$ rovnici $\Box\varphi = 0$. Odp. je na str.53.

¡! Odp. ze str.53: WWW

¿? Ověřte, že znaménko „−“ určuje vlnu rozbíhavou, „+“ vlnu sbíhavou. Odp. je na str.53.

¡! Odp. ze str.53: WWW

7.8 Nehomogenní rovnice; Greenova funkce

Pro řešení nehomogenní rovnice

$$\Box F = -\rho \tag{257}$$

hledejme nejprve Greenovu funkci $\mathcal{G}(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')$ řešící rovnici

$$\Box\mathcal{G} = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t'). \tag{258}$$

Potom je totiž

$$F(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \int \mathrm{d}t'\mathcal{G}(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')\rho(\vec{r}\,',t'). \tag{259}$$

¿? Toto řešení je vlastně velice „nefyzikální“. Pročpak? Jak vypadá fyzikálně jeho zdroj? Odp. je na str.47.

Řešení známe pro $c \to \infty$: pak $\Box \to \triangle$ a $\mathcal{G}(\vec{r},\vec{r}\,') = \mathcal{G}_\triangle(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi R}$, značíme-li $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}\,'$.

¿? Dovedli byste to dokázat? Odp. je na str.53.

¡! Odp. ze str.53: WWW

Toto řešení $\mathcal{G}_\triangle$ je kulově symetrické; závisí jen na r a nikoli na θ,φ.

Pro $c < \infty$ zkusíme zkombinovat $\mathcal{G}_\triangle$ s kulovou vlnou; zvolíme

$$\mathcal{G}_\Box(\vec{R},T) = \frac{1}{4\pi R}\delta(T \pm \frac{R}{c})$$

kde značíme $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}\,'; T \equiv t - t'$. Neboli: potenciál jako Coulombův potenciál, ale polohu zdroje bereme v jiném čase:

čas retardovaný (zpožděný) $t' = t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$

čas advansovaný (předbíhavý) $t' = t + \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$.

Obojí řešení vyhovuje D'Alembertově rovnici. Bereme-li však zdroje jako příčinu a pole jako důsledek, má fyzikální smysl jen retardovaný potenciál.