# Integrabilita Pfaffových forem

- Pfaffova forma – lineární dif. forma v diferenciálech nezávislých proměnných (také 1-forma)

$$d\omega(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \dots, X_n)\, dX_n \qquad (1)$$

- <u>základní otázka:</u> $\exists\, \omega = \omega(X_1, \dots, X_n)$ taková, že (1) je její úplný diferenciál?

- <u>podmínky integrability</u>
  - $\exists \omega \Rightarrow A_i = \dfrac{\partial \omega}{\partial X_i} \Leftrightarrow \vec{A} = \nabla \omega$
  - 3D: $\nabla \times (\nabla \omega) \equiv 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{A} = 0$
  - obecně:

$$\boxed{\frac{\partial A_i}{\partial X_j} = \frac{\partial A_j}{\partial X_i}} \ (2) \qquad i,j = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} n(n-1)$ nezávislých podm.

- <u>integrační faktor</u>
  - nechť podmínky integrability (2) nejsou splněny; stále může $\exists$ funkce $\mu = \mu(X_1, \dots, X_n)$:

$$\frac{\partial(\mu A_i)}{\partial X_j} = \frac{\partial(\mu A_j)}{\partial X_i}$$

- neboli $d\sigma = \mu\, d\omega$ je úplný dif. a $\exists\, \sigma = \sigma(X_1 \dots)$

$$\Rightarrow A_i \frac{\partial \mu}{\partial X_j} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial X_j} = A_j \frac{\partial \mu}{\partial X_i} + \mu \frac{\partial A_j}{\partial X_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_i \frac{\partial \log \mu}{\partial X_j} - A_j \frac{\partial \log \mu}{\partial X_i} = -\left(\frac{\partial A_i}{\partial X_j} - \frac{\partial A_j}{\partial X_i}\right) = F_{ij} \neq 0} \ (3)$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} n(n-1) = \binom{n}{2}$ rovnic pro $\mu = \mu(X_1, \dots, X_n)$

• Příklady

• $k=1$ ⇒ triv.

• $k=2$ ⇒ 1 PDR pro fci 2 proměnných ⇒ $\mu$ vždy $\exists$

– rovnice je $d\omega = A_1(x,y)dx + A_2(x,y)dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{A_1(x,y)}{A_2(x,y)} \equiv f(x,y)$$ ⇒ rovnice je ekvivalentní obyčejné dif. rovnici

⇒ řešení $\exists$ za velmi obecných podmínek a můžeme ho zapsat ve tvaru

$$\Psi(x,y) = k$$

– tento zápis definuje neprotínající-se křivky, číslované hodnotou $k$

$$\Rightarrow d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\Psi/\partial x}{\partial \Psi/\partial y} = -\frac{A_1(x,y)}{A_2(x,y)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_1}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \lambda(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \lambda(x,y)A_1(x,y) \quad \& \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \lambda(x,y)A_2(x,y)$$

⇒ $\lambda$ je hledaný int. faktor a pro $k=2$ vždy $\exists$

! $d\Psi = 0 \Leftrightarrow d\omega = 0$ ⇒ $\Psi$ korektně definuje ekvipotenciály příslušné původní formě

---

• $k=3$ – 3 PDR pro $\mu = \mu(x_1,x_2,x_3)$

• def. $F_{ij} \equiv -\frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ $\qquad y_i = \frac{\partial \log \mu}{\partial x_i}$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F} \equiv (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

⇒ (3) lze zapsat jako $\boxed{\vec{A}\times\vec{y} = \vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{A}}$

• ekvivalentně také

$$\begin{pmatrix} 0 & -A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} = M\vec{y} = \vec{F} \quad ; \quad h(M) = 2 \,!$$

⇒ řešení ∃ pouze pokud $\vec{F}$ je lin. kombinací dvou nez. sloupců $M$

• lze přepsat: $\vec{A} \times \vec{y} = \text{rot}\,\vec{A} \quad / \vec{A}.$

$$\Rightarrow \quad 0 \equiv \vec{A}.(\vec{A} \times \vec{y}) = \vec{A}.\text{rot}\,\vec{A} \qquad \Leftarrow \vec{A} \perp (\vec{A} \times y) \;\forall \vec{y}$$

⇒ ve 3D je forma integrovatelná právě tehdy, když

$$\boxed{\vec{A}.\,\text{rot}\,\vec{A} = 0} \qquad (4)$$

---

<u>Geometrický význam integračního faktoru</u> (viz Luscombe)

• $\vec{A}$ nevírové:

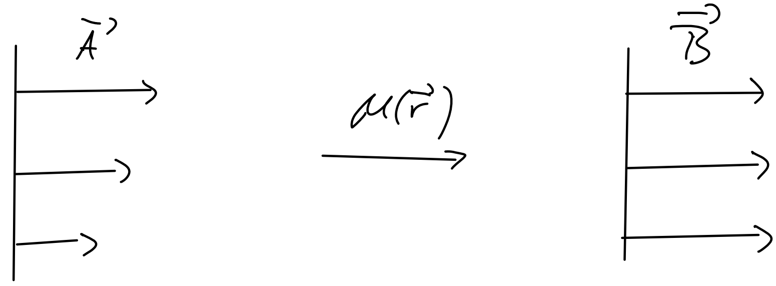
$$\oint \vec{A}.d\vec{r} = 0 \iff \int_C \vec{A}.d\vec{r} = \Delta\omega$$ závisí pouze na koncových bodech $C$

• $\vec{A}$ vírové: $\int_C \vec{A}.d\vec{r}$ závisí na trajektorii, ale

<u>mohou existovat</u> speciální trajektorie $\tilde{C}$ takové, že <u>$d\vec{r}$ je všude kolmé na $\vec{A}$</u>

$$\Rightarrow \int_{\tilde{C}} \vec{A}.d\vec{r} = 0$$

• pokud ∃ nevírové pole $\vec{B}$ takové, že je ve ∀ bodech lokálně kolineární s $\vec{A}$: $\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\vec{r})\,\vec{A}(\vec{r})$, potom jeho kolmice definují ekvipotenciální plochy (pokrývají celý prostor




---

**Příklady:**

1) **$k=2$:** $d\omega = (x^2+y)\,dx - x\,dy = 0$

a) ukažte, že lze hledat int. faktor ve tvaru $\mu=\mu(x)$

b) ukažte, že $\mu = \frac{k}{x^2}$

c) ukažte $d\sigma = \mu\, d\omega \Rightarrow \sigma = x + \frac{y}{x^2} + C$

2) **$k=3$:** $d\omega = yz\,dx + xz\,dy + xyz\,dz$

a) ukažte, že $\exists \mu$ (rce 4)

b) ověřte $\mu = \frac{1}{xyz}$

c) ukažte $\sigma = \log x + \log y + z$

3) **$đQ = dU + p\,dV$**

a) uvažujte $U = U(p,V) \Rightarrow$

$$đQ = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p\right] dV$$

b) najděte rovnici pro int. faktor $\lambda$:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V\right]_p = \frac{\partial}{\partial p}\left(\lambda\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p\right]\right)_V$$

c) ukažte, že tuto rovnici lze přepsat na

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\lambda + p = -\lambda\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_V = \lambda^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda^{-1}}\right)_V$$