Domácí úkol č. 4

Zadáno: 18.12.2023 **Odevzdat do: 10.1.2024**

1 Rozložení rychlostí v ideálním plynu

Na základě mikrokanonického popisu ideálního plynu uzavřeného v nádobě o objemu $V = L^3$

1. ukažte, že v termodynamické limitě $N \to \infty$ je pravděpodobnost, že velikost x-ové (nebo jiné) komponenty rychlosti libovolně vybrané částice je v intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$, popsána *Maxwellovým rozdělením*
$$w(v_x)dv_x = K \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_BT}\right) dv_x,$$
kde K je vhodná konstanta (určete);
2. najděte pravděpodobnostní rozdělení pro absolutní hodnotu rychlosti $v = |\mathbf{v}|$ částic plynu;
3. vypočtěte střední hodnoty $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle v \rangle$ a $\sqrt{\langle \mathbf{v^2} \rangle}$.

Návod:
Pokud se omezíme na nadplochu fázového prostoru odpovídající přesné hodnotě E vnitřní energie plynu, potom je hustota pravděpodobnosti obsazení mikrostavu definovaného hybnostmi $\mathbf{p}_i$ a polohami $\mathbf{q}_i$ jednotlivých částic $(i = 1, \dots, N)$ nenulová a konstantní na nadploše splňující podmínky
$$\sum_i \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m} = E \quad \texttt{a} \quad |\mathbf{q}_i| \leq \frac{L}{2},$$
kde L je délka hrany nádoby a m je hmotnost částice plynu. Odpovídající objem fázového prostoru $\Sigma(E)$ je úměrný povrchu $3N$-dimenzionální sféry o poloměru $\sqrt{2mE}$. Hustota pravděpodobnosti, že například první komponenta hybnosti první částice má velikost v intervalu $(p_x, p_x + dp_x)$, je potom rovna podílu povrchů $(3N-1)$-dimenzionální sféry o poloměru $\sqrt{2mE - p_x^2}$ a $3N$-dimenzionální sféry o poloměru $\sqrt{2mE}$. Odůvodněte a srovnejte s odvozením kanonické hustoty pravděpodobnosti na podsystému v kontaktu s efektivně nekonečným rezervoárem.

Zadání pokračuje na druhé straně...

2 Relativistický plyn

Ultra-relativistický ideální plyn je charakterizován disperzní relací

$$\epsilon(\vec{p}) = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \approx cp.$$

To znamená, že se jedná o systém neinteragujících částic popsaný hamiltoniánem

$$H\left(\vec{p}_1, \vec{q}_1, \ldots, \vec{p}_N, \vec{q}_N\right) = \sum_{i=1}^{N} c p_i,$$

kde $p_i = |\vec{p}_i|$ je velikost (tří)hybnosti i-té částice. Pro tento systém:

1. Najděte termickou $[p = p(T, V, N)]$ a kalorickou $[U = U(T, V, N)]$ stavovou rovnici.

2. Určete rozdíl $C_p - C_V$ mezi tepelnými kapacitami při konstantním tlaku a objemu.