

Základní matematické „triky“

Implicitní funkce, úplné diferenciály, Jacobiho determinanty a homogenní funkce

1 Implicitní funkce

Rovnice tvaru $f(x, y, z) = 0$ vyjadřuje implicitní funkční vztah mezi proměnnými x, y, z . Zvolíme-li postupně, pro funkci f splňující předpoklady Věty o implicitní funkci (Věta 12.4.14 v Černý, Pokorný - Základy matematické analýzy pro studenty fyziky 2), dvě různá vyjádření jedné proměnné pomocí zbývajících, dostaneme

$$x = x(y, z) \implies dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz, \quad (1)$$

$$z = z(x, y) \implies dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy. \quad (2)$$

Dosadíme-li (2) do (1), obdržíme

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y - 1\right] dx + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] dy = 0.$$

Protože dx a dy jsou z definice nezávislé proměnné, musí být oba koeficienty nulové. Dostáváme dva základní poznatky z Matematické analýzy 2, které budeme v dalším používat, zejména pro redukci derivací

$$\text{a) } \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\right]^{-1}, \quad \text{b) } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}.$$

Poznámka 1

Zjednodušeně, věta o implicitní funkci říká, že máme-li funkci $f(x, y, z)$ se spojitými prvními derivacemi v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) a platí

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

pak lze rovnici $f(x, y, z) = 0$ lokálně přepsat jako $x = x(y, z)$, přičemž $x(y_0, z_0) = x_0$. Aby tento předpis definoval funkci, musí každému (y, z) blízko (y_0, z_0) odpovídat právě jedno řešení x blízko x_0 . Podmínka nenulové derivace podle x tuto lokální jednoznačnost zaručuje.

Zaručuje také, že funkce $x(y, z)$ má spojitě první derivace. Ty můžeme spočítat z řetězového pravidla aplikovaného na identitu $f(x(y, z), y, z) = 0$:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\partial f / \partial z}{\partial f / \partial x},$$

kde derivace funkce f vyhodnocujeme v bodě $(x(y, z), y, z)$.

2 Úplný diferenciál funkce více proměnných

Je-li

$$f = f(x_1, \dots, x_k), \quad df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (1)$$

jestliže je oblast popsaná souřadnicemi $x_1, \dots, x_k$ jednoduše souvislá (každé dva body lze spojit a nemá díry), pak platí, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \iff \oint df = 0. \quad (2)$$

Poznámka 2

Nechť $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na otevřené oblasti Ω . Její *totální diferenciál* v bodě x je lineární zobrazení

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i, \quad h = (h_1, \dots, h_k).$$

Popisuje změnu hodnoty funkce v prvním řádu, tedy

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + o(\|h\|).$$

Pro malý posun h tak $df_x(h)$ představuje lineární aproximaci změny funkce.

Označíme-li dx_i souřadnicové lineární zobrazení $dx_i(h) = h_i$, můžeme diferenciál stručně zapsat jako

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Tento zápis vyjadřuje rovnost lineárních zobrazení; df obecně není rovno konečné změně hodnoty funkce.

Poznámka 3

Když $f \in C^2(\Omega)$ (druhá derivace existuje a je spojitá), tak jsou obě rovnice (2) splněny automaticky.

Poznámka 4

Pro spojitou 1-formu ω na otevřené souvislé oblasti platí

$$\omega = df \text{ pro nějakou funkci } f \iff \oint_{\gamma} \omega = 0 \text{ pro každou uzavřenou, po částech } C^1 \text{ křivku } \gamma.$$

Zpětná implikace plyne z definice

$$f(x) = \int_{x_0}^x \omega,$$

kde x_0 je pevně zvolený bod oblasti. Nulovost integrálů po všech uzavřených křivkách zaručuje, že tento integrál nezávisí na zvolené cestě. Takto definovaná funkce pak splňuje $df = \omega$.

2.1 Integrační faktor

Forma (tj. 1-forma: lineární zobrazení aplikovatelné na vektor $h = (h_1, \dots, h_k)$)

$$d\omega = \sum_i A_i(x_1, \dots, x_k) dx_i$$

není obecně úplným diferenciálem (viz. Matematická analýza 2), neboť

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial A_j}{\partial x_i}.$$

Pokud je úplným diferenciálem, tak ji nazýváme exaktní formou. Když není, tak může existovat všude nenulová funkce $\mu = \mu(x_1, \dots, x_k)$ taková, že

$$\frac{\partial(\mu A_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu A_j)}{\partial x_i}.$$

Potom

$$d\sigma = \mu d\omega$$

je úplný diferenciál a existuje $\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_k)$. μ pak nazýváme integračním faktorem. Dále platí

$$d\sigma = 0 \iff d\omega = 0.$$

Poznámka 5

Funkci σ získáme integrací formy vynásobené integračním faktorem:

$$\sigma(x) = \sigma(x_0) + \int_{x_0}^x \mu \omega = \sigma(x_0) + \int_{\gamma} \sum_i \mu A_i dx_i.$$

Zde γ je libovolná po částech C^1 cesta z pevně zvoleného bodu x_0 do bodu x . Protože je forma $\mu\omega$ exaktní, výsledek nezávisí na zvolené cestě.

Ekvivalentně můžeme funkci σ určit řešením rovnic

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = \mu A_i.$$

Funkce σ je určena až na aditivní konstantu.

Příklad. Uvažujme

$$(x^2 + y) dx - x dy = 0.$$

Protože

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1,$$

nejde o úplný diferenciál. Pro integrační faktor μ požadujeme

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x^2 + y)] = \frac{\partial \mu}{\partial y}(x^2 + y) + \mu = \frac{\partial}{\partial x}(-\mu x) = -x \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu.$$

Můžeme volit $\mu = \mu(x)$, a tedy

$$-x \frac{d\mu}{dx} = 2\mu, \implies \frac{d\mu}{\mu} = -2 \frac{dx}{x}, \implies \log \mu = -2 \log x \implies \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Odtud

$$d\sigma = \left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy.$$

Integrací podle y dostaneme

$$\sigma = -\frac{y}{x} + \tilde{C}(x), \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_y = \frac{y}{x^2} + \frac{d\tilde{C}}{dx}.$$

(Taky jsme mohli integrovat podle jakékoli jiné křivky, protože výsledek nezávisí na křivce, až na aditivní konstantu. Tohle je ale jednodušší, protože je to po částech, za cenu, že později určíme $\tilde{C}$.) Porovnání s koeficientem u dx dává

$$\frac{y}{x^2} + \frac{d\tilde{C}}{dx} = 1 + \frac{y}{x^2}, \quad \frac{d\tilde{C}}{dx} = 1, \quad \tilde{C} = x + C,$$

kde C je skutečně konstanta, takže

$$\sigma = x - \frac{y}{x} + C.$$

Poznámka 6

Definujeme pojmy *uzavřená* forma, splňující $d\omega = 0$ a *exaktní* forma, tedy $\exists \sigma : \omega = d\sigma$.

Poznámka 7

Svislá cesta začíná v bodě $(x, 0)$, který závisí na x . Integrací po této cestě proto získáme pouze

$$\sigma(x, y) - \sigma(x, 0) = -\frac{y}{x}.$$

Závislost $\sigma(x, 0)$ na x je ještě třeba určit z koeficientu u dx .

Alternativně zvolíme pevný počáteční bod $(x_0, 0)$ a cestu tvořenou dvěma úsečkami:

$$(x_0, 0) \longrightarrow (x, 0) \longrightarrow (x, y).$$

Předpokládáme, že x_0 a x mají stejné nenulové znaménko, aby cesta neprocházela singularitou $x = 0$. Na první úsečce platí $y = 0$ a $dy = 0$, na druhé je x konstantní a $dx = 0$. Proto Integrujeme formu

$$d\sigma = \left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy$$

po cestě $(x_0, 0) \rightarrow (x, 0) \rightarrow (x, y)$.

Na první úsečce položíme $(x, y) = (t, 0)$. Potom $dx = dt$ a $dy = 0$, takže

$$\sigma(x, 0) - \sigma(x_0, 0) = \int_{x_0}^x \left[\left(1 + \frac{0}{t^2}\right) dt - \frac{1}{t} \cdot 0 \right] = \int_{x_0}^x dt = x - x_0.$$

Na druhé úsečce položíme $(x, y) = (x, s)$, kde x zůstává konstantní. Potom $dx = 0$ a $dy = ds$, takže

$$\sigma(x, y) - \sigma(x, 0) = \int_0^y \left[\left(1 + \frac{s}{x^2}\right) \cdot 0 - \frac{1}{x} ds \right] = -\frac{1}{x} \int_0^y ds = -\frac{y}{x}.$$

Sečtením obou příspěvků dostáváme

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) - \sigma(x_0, 0) &= [\sigma(x, 0) - \sigma(x_0, 0)] + [\sigma(x, y) - \sigma(x, 0)] \\ &= x - x_0 - \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Odtud přímo dostáváme

$$\boxed{\sigma(x, y) = x - \frac{y}{x} + C,} \quad C = \sigma(x_0, 0) - x_0.$$

Poznámka 8

Když je forma exaktní, tak funkce, jehož je tato forma úplným diferenciálem, je funkce stavová (stavová veličina), tj. závisí pouze na stavu fyzikálního systému, tj. na prostorových souřadnicích. To plyne z

$$\oint df = 0.$$

(Můžete přemýšlet jak.) Příklad je například vnitřní energie U a s tím spojená 1-forma dU .

Naopak, ne všechny formy vedou ke stavové funkci. Např. taková zobecněná práce

$$dW = \sum_i F_i dx_i,$$

obecně není exaktní formou a proto nevede ke stavové funkci, tj. práce závisí na celé trajektorii / historii, nikoliv jen na výsledném stavu.

Pak například teplo dQ není stavová veličina, ale když se vynásobí inverzní teplotou, tak to dá entropii, což už stavová veličina je

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

$1/T$ je zde integrační faktor.

3 Jacobiho determinanty

Pro funkce $u, v, \dots, w$ proměnných $x, y, \dots, z$ definujeme

$$\frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(x, y, \dots, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \dots & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \dots & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \dots & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Poznámka 9

Jacobiho determinant známe např. ze změny proměnných ve vícenásobném integrálu. Pro vzájemně jednoznačnou změnu souřadnic $u = u(x)$ se spojitými prvními derivacemi a nenulovým Jacobiho determinantem platí

$$\int_{\Omega} f(u) d^k u = \int_U f(u(x)) \left| \det \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^k \right| d^k x, \quad \Omega = u(U).$$

Absolutní hodnota Jacobiho determinantu tedy udává, jak se při změně souřadnic lokálně mění objem. Jeho znaménko určuje, zda se orientace zachovává, nebo obrací.

3.1 Parciální derivace

Parciální derivaci lze zapsat pomocí Jacobiho determinantů. Při výpočtu $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y, \dots, z}$ měníme pouze x , zatímco $y, \dots, z$ držíme konstantní. Platí

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y, \dots, z} = \frac{\partial(u, y, \dots, z)}{\partial(x, y, \dots, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \dots & \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Řádky pod prvním řádkem tvoří derivace souřadnic $y, \dots, z$ podle $x, y, \dots, z$. Protože jde o nezávislé souřadnice, dostáváme příslušné řádky jednotkové matice. Rozvojem determinantu podle prvního sloupce tak získáme právě $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y, \dots, z}$.

3.2 Řetězové pravidlo

$$\frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(x, y, \dots, z)} = \frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(r, s, \dots, t)} \frac{\partial(r, s, \dots, t)}{\partial(x, y, \dots, z)}.$$

V indexovém zápisu

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_a} \frac{\partial y_a}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

jde o „součin matic“. Pro maticový součin $A = BC$ současně platí

$$|A| = |B| |C|.$$

Je-li změna souřadnic lokálně invertibilní, je Jacobiho matice inverzní změny souřadnic inverzní maticí k původní Jacobiho matici:

$$J = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad J^{-1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right).$$

To plyne z řetězového pravidla aplikovaného na složení změny souřadnic s její inverzí, které dává $JJ^{-1} = I$. Pro determinanty proto platí

$$1 = \det I = \det(JJ^{-1}) = \det J \det J^{-1}, \quad \det J^{-1} = \frac{1}{\det J}.$$

Předpokládáme zde $\det J \neq 0$.

Přímým důsledkem je vztah

$$\frac{\partial(x, y, \dots, z)}{\partial(u, v, \dots, w)} = \left[\frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(x, y, \dots, z)} \right]^{-1}.$$

Příklad. Převedme derivaci entropie podle teploty při konstantním objemu na derivace v proměnných T, p . Počet částic N držíme konstantní. Pomocí řetězového pravidla pro Jacobiho determinanty dostáváme

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{\partial(S, V, N)}{\partial(T, V, N)} = \frac{\partial(S, V, N)}{\partial(T, p, N)} \frac{\partial(T, p, N)}{\partial(T, V, N)} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,N} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} \right] \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T,N} \right].$$

Od tohoto místa již index N nepíšeme:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T - \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \right] \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

4 Homogenní funkce p -tého řádu

Homogenní funkce F řádu p splňuje

$$F(\lambda x_1, \dots, \lambda x_k) = \lambda^p F(x_1, \dots, x_k).$$

Derivací podle λ dostaneme

$$p\lambda^{p-1}F(x_1, \dots, x_k) = \frac{dF}{d\lambda} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial(\lambda x_j)} \frac{\partial(\lambda x_j)}{\partial \lambda} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial(\lambda x_j)} x_j.$$

Pro $\lambda = 1$ obdržíme Eulerův teorém:

$$pF(x_1, \dots, x_k) = \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j} x_j.$$

Poznámka 10

Na začátku je definovaná jen změna vnitřní energie dU , nikoliv energie U samotná.

Když předpokládáme, že vnitřní energie termodynamického systému je extenzivní, tj. je homogenní funkcí prvního řádu:

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S, V, N),$$

Tak Eulerův teorém dává předpis pro celou funkci,

$$U = S \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} + V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} + N \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V}.$$

Z termodynamického vztahu $dU = T dS - p dV + \mu dN$ identifikujeme příslušné derivace a získáme

$$U = TS - pV + \mu N.$$

5 Legendreova transformace

Uvažujme funkci $y = y(x)$ a označme

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Ptejme se nejprve, zda lze funkci popsat pouze pomocí jejího sklonu, tedy přejít od $y = y(x)$ k zápisu $y = y(p)$ bez ztráty informace.

Příklad. Pro

$$y = \frac{1}{10}x^2$$

platí

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{5}, \quad x = 5p, \quad y(p) = \frac{5}{2}p^2.$$

Známe-li zpětně pouze $y(p)$ a vztah $p = dy/dx$, dostáváme diferenciální rovnici

$$y(x) = \frac{5}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

Pro rostoucí větev tedy

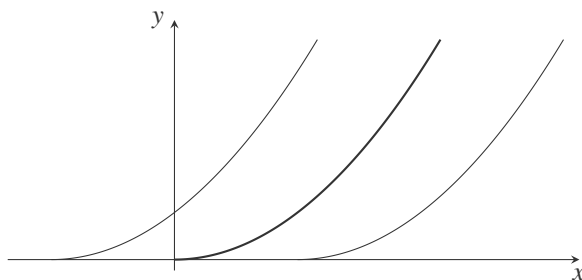
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2y}{5}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{2}{5}} dx,$$

a po integraci

$$2\sqrt{y} = \sqrt{\frac{2}{5}} x + 2C.$$

Odtud

$$y = \left(\frac{x}{\sqrt{10}} + C \right)^2 = \frac{1}{10} (x + x_0)^2, \quad x_0 = \sqrt{10} C.$$



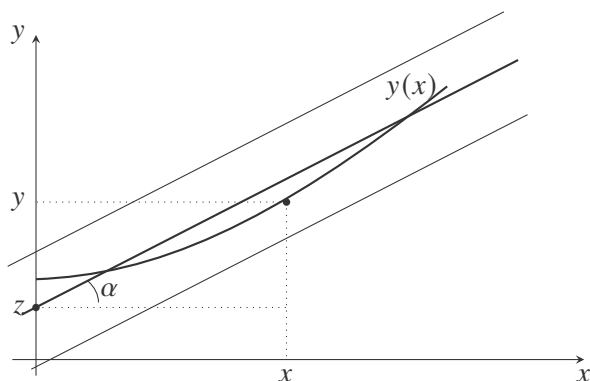
Naivní přepis $y(x) \mapsto y(p)$ tedy při zpětné transformaci určuje libovolně vodorovně posunutou parabolu. Informace o poloze původní funkce se ztratila.

Jednoznačné určení původní funkce získáme tehdy, pokud vedle derivace známe také průsečík její tečny s osou y . Uvažujme funkci $y = y(x)$ a označme

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Tečna ke grafu v bodě (x, y) protíná osu y v bodě $(0, z)$. Z její směrnice plyne

$$p = \tan \alpha = \frac{y - z}{x - 0}, \quad y - z = px, \quad z = y - px.$$



Legendreova transformace funkce $y = y(x)$ s $dy/dx = p$ je funkce

$$z(p) = y(x(p)) - p x(p).$$

5.1 Inverzní Legendreova transformace

Z definice p dostáváme

$$dz = dy - p dx - x dp = \underbrace{(dy - p dx)}_{=0} - x dp = -x dp.$$

Proto

$$x = -\frac{dz}{dp}, \quad y(x) = z(p(x)) + x p(x).$$

Přímou a inverzní transformaci lze shrnout následovně:

Legendreova transformace	Inverzní Legendreova transformace
$y = y(x)$	$z = z(p)$
$p = \frac{dy}{dx} \implies x = x(p)$	$x = -\frac{dz}{dp} \implies p = p(x)$
$z(p) = y(x(p)) - p x(p)$	$y(x) = z(p(x)) + x p(x)$

Operace je symetrická v obou směrech. Obecně lze přechod od funkce $f = f(x)$ k funkci jejího sklonu zapsat jako

$$F(p) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} x = f(x(p)) - p x(p).$$

Příklad. Mějme

$$y = \frac{1}{10}x^2.$$

Potom

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{5}, \quad x = 5p,$$

a tedy

$$z(p) = \frac{1}{10}(5p)^2 - p(5p) = -\frac{5}{2}p^2.$$

Inverzní transformace dává

$$x = -\frac{dz}{dp} = 5p, \quad p = \frac{x}{5},$$

a po dosazení

$$y(x) = z(p(x)) + x p(x) = -\frac{5}{2} \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \frac{x^2}{5} = \frac{1}{10}x^2.$$

Integrabilita Pfaffových forem

Pfaffovy formy, podmínky integrability a integrační faktor

1 Pfaffova forma

Pfaffova forma je lineární diferenciální forma v diferenciálech nezávislých proměnných (také 1-forma):

$$d\omega(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k A_i(x_1, \dots, x_k) dx_i. \quad (1)$$

Základní otázka: Existuje $\omega = \omega(x_1, \dots, x_k)$ taková, že (1) je její úplný diferenciál?

2 Podmínky integrability

Existuje-li taková funkce ω , potom

$$A_i = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \iff \vec{A} = \vec{\nabla} \omega.$$

Ve třech rozměrech tedy

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \omega) \equiv 0 \implies \text{rot } \vec{A} = 0.$$

Obecně dostáváme podmínky

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Celkem jde o $\frac{1}{2}k(k-1)$ nezávislých podmínek.

3 Integrační faktor

Nejsou-li podmínky integrability (2) splněny, stále může existovat funkce $\mu = \mu(x_1, \dots, x_k)$ taková, že

$$\frac{\partial(\mu A_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu A_j)}{\partial x_i}.$$

Jinak řečeno,

$$d\sigma = \mu d\omega$$

je úplný diferenciál a existuje $\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_k)$. Po rozepsání podmínky dostáváme

$$A_i \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = A_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial A_j}{\partial x_i},$$

a tedy

$$A_i \frac{\partial \log \mu}{\partial x_j} - A_j \frac{\partial \log \mu}{\partial x_i} = - \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) = F_{ij} \neq 0. \quad (3)$$

Jde o $\frac{1}{2}k(k-1) = \binom{k}{2}$ rovnic pro $\mu = \mu(x_1, \dots, x_k)$.

4 Příklady podle počtu proměnných

4.1 $k = 1$

Integrační faktor existuje vždy.

4.2 $k = 2$

Dostáváme jednu parciální diferenciální rovnici pro funkci dvou proměnných, takže μ vždy existuje. Rovnice

$$d\omega = A_1(x, y) dx + A_2(x, y) dy = 0$$

je ekvivalentní obyčejné diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A_1(x, y)}{A_2(x, y)} \equiv f(x, y).$$

Řešení dle Picardovy–Lindelöfovy věty (Věta 8.3.6 v Černý, Pokorný - Základy matematické analýzy pro studenty fyziky 2) existuje za velmi obecných podmínek a můžeme je zapsat ve tvaru

$$F(x, y) = k.$$

Tento zápis definuje neprotínající se křivky číslované hodnotou k . Současně

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{A_1}{A_2}.$$

Proto

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda(x, y),$$

tj.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda(x, y) A_1(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda(x, y) A_2(x, y).$$

Funkce λ je hledaný integrační faktor; pro $k = 2$ vždy existuje.

$$dF = 0 \iff d\omega = 0.$$

Funkce F korektně definuje ekvipotenciály příslušné původní formě.

4.3 $k = 3$

Máme tři parciální diferenciální rovnice pro $\mu = \mu(x_1, x_2, x_3)$. Položme

$$F_{ij} \equiv -\frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad y_i = \frac{\partial \log \mu}{\partial x_i}.$$

Pak

$$\vec{F} \equiv (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \text{rot } \vec{A}$$

a soustavu (3) lze přepsat jako

$$\vec{A} \times \vec{y} = \vec{F} = \text{rot } \vec{A}.$$

Eliminujme také $\vec{y}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} = M\vec{y} = \vec{F}, \quad h(M) = 2.$$

Řešení existuje pouze tehdy, je-li $\vec{F}$ lineární kombinací dvou nezávislých sloupců matice M . Ekvivalentně lze psát

$$\vec{A} \times \vec{y} = \text{rot } \vec{A}.$$

Skalární součin s $\vec{A}$ dává

$$0 = \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{y}) = \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A} \iff \vec{A} \perp (\vec{A} \times \vec{y}) \quad \forall \vec{y}.$$

Ve třech rozměrech je tedy forma integrovatelná právě tehdy, když

$$\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A} = 0. \quad (4)$$

5 Geometrický význam integračního faktoru a teorie potenciálu

Nechť $\mathcal{M}$ je hladká n -rozměrná hladká varieta a $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M})$ je nenulové pole 1-formy na $\mathcal{M}$. Toto pole v každém bodě určuje nadrovinu v tečném prostoru $T_p\mathcal{M}$

$$\mathcal{D}_p = \text{Ker } \alpha|_p \subset T_p\mathcal{M}.$$

Přirozená otázka zní, zda se tyto nadroviny skládají do skutečných nadploch, tedy zda existují lokální hladiny $\sigma = \text{konst.}$, jejichž tečné prostory jsou právě $\mathcal{D}_p$.

Odpověď dává **Frobeniův teorém** (NTMF059, NTMF037, NTMF038). Pro distribuci kodimenze jedna platí lokální ekvivalence

$$\mathcal{D} = \text{ker } \alpha \text{ je integrovatelná} \iff \alpha \wedge d\alpha = 0.$$

Je-li podmínka splněna, potom lze v okolí každého bodu nalézt nenulový integrační faktor μ a funkci σ tak, že

$$\mu\alpha = d\sigma.$$

Pro $\alpha = \vec{A} \cdot d\vec{r}$ ve třech eukleidovských dimenzích se přitom dostává

$$\alpha \wedge d\alpha = (\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A}) dx \wedge dy \wedge dz,$$

takže Frobeniova podmínka je přesně rovnice (4). Frobeniův teorém je lokální. Globální otázka je jemnější: uzavřená 1-forma je podle Poincarého lemmatu lokálně exaktní, ale globální potenciál existuje právě tehdy, když její třída ekvivalence v první homologické grupě $H_{\text{dR}}^1(\mathcal{M})$ vymizí.

Na kompaktní orientovatelné Riemannovské varietě rozkládá **Hodgeova teorie** každou 1-formu ve tvaru (NTMF060)

$$\alpha = d\varphi + \delta\beta + h,$$

kde h je harmonická forma. Je-li $\mu\alpha$ uzavřená, její harmonická část reprezentuje globální topologickou překážku k tomu, aby $\mu\alpha$ byla diferenciálem jediné globálně definované funkce. Touto překážkou může být například “díra” ve varietě.

Návaznosti na další kurzy. Stejná struktura se tedy znovu objevuje v diferenciální geometrii (distribuce a foliace v předmětu Geometrické metody teoretické fyziky I: NTMF059), globální analýze (de Rhamova kohomologie a Hodgeova teorie v předmětu Geometrické metody teoretické fyziky II: NTMF060), teorii parciálních diferenciálních rovnic, teorii relativity (NTMF037, NTMF038) a kalibračních teoriích (NTMF022, NTMF060).

6 Příklady

Příklad. 1. $k = 2$:

$$d\omega = (x^2 + y) dx - x dy = 0.$$

a) Ukažte, že lze hledat integrační faktor ve tvaru $\mu = \mu(x)$.

b) Ukažte, že $\mu = \frac{1}{x^2}$.

c) Ukažte, že

$$d\sigma = \mu d\omega \quad \implies \quad \sigma = x - \frac{y}{x} + C.$$

Příklad. 2. $k = 3$:

$$\omega = yx dx + xz dy + xyz dz = 0.$$

1. Ověřte, že

$$\mu = \frac{1}{xyz}, \quad xyz \neq 0.$$

2. Ukažte, že

$$\sigma = \log |x| + \log |y| + z + C.$$

Příklad. 3. $dQ = dU + p dV$:

a) Uvažujte $U = U(p, V)$. Potom

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p\right] dV.$$

b) Najděte rovnici pro integrační faktor λ :

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V \right]_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(\lambda \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p \right] \right)_V.$$

c) Ukažte, že tuto rovnici lze přepsat na

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\lambda + p = -\lambda \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_V \equiv \lambda^{-1} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda^{-1}}\right)_V.$$