Skryté symetrie vícedimenzionálních černých děr

profesorská přednáška

doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

ÚTF MFF UK

Praha, 5. dubna 2017

`Pavel.Krtous@mff.cuni.cz`

`http://utf.mff.cuni.cz/~krtous/`

Gravitace jako zakřivený prostoročas

Obecná teorie relativity (Einstein 1916):

- Prostor a čas popisován v řeči čtyřdimenzionálního prostoročasu
- Metrické a kauzální vlastnosti prostoročasu jsou zachyceny v lorentzovské metrice
- Gravitace se popisuje jako zakřivení geometrie

Geometrizace prostoru a času

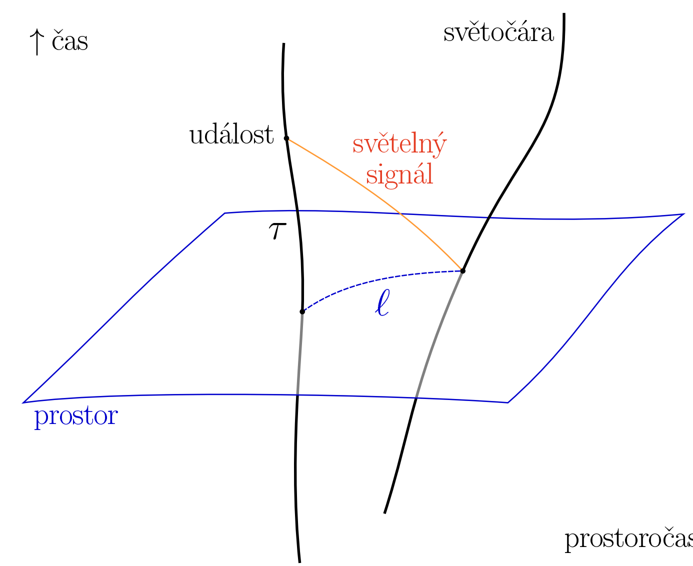
prostor a čas spojen do *protoročasu* – 'prostor událostí'

historie pozorovatele popsaná *světočárou* – křivka v prostoročase

vlastní čas pozorovatele – 'časová délka' světočáry

geometrie popisuje jak vzdálenosti, tak délky časových úseků

konečná rychlost šíření signálu ⇒ netriviální *kauzální struktura*



Gravitace jako zakřivený prostoročas

Obecná teorie relativity (Einstein 1916):

- Prostor a čas popisován v řeči čtyřdimenzionálního prostoročasu
- Metrické a kauzální vlastnosti prostoročasu jsou zachyceny v lorentzovské metrice
- Gravitace se popisuje jako zakřivení geometrie

Einsteinův gravitační zákon:

Geometrie je dána rozložením energie a hybnosti

$$\mathbf{Ric} - \frac{1}{2} R\, \boldsymbol{g} + \Lambda\, \boldsymbol{g} = 8\pi\, \boldsymbol{T}$$

$\boldsymbol{g}$ – metrika
$\mathbf{Ric}, R$ – Ricciho a skalární křivost
$\boldsymbol{T}$ – tenzor energie-hybnosti
Λ – kosmologická konstanta

Rovnice pro vývoj hmoty:

Prostoročasová geometrie: jeviště pro pohyb veškeré hmoty

Rovnice geodetiky (pohyb volné částice)

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}}{d\tau}\boldsymbol{u} = 0$$

Vlnová rovnice (šíření polí)

$$\big[\Box - m^2\big]\Phi = 0$$

Diracova rovnice (popis fermionové hmoty)

$$\big[\boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{\nabla}_a - m\big]\boldsymbol{\psi} = 0$$

Maxwellovy rovnice (EM pole)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{J} \qquad \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{F} = 0$$

Standardní kosmologický model

Prostorově homogenní isotropní vesmír časově proměnné velikosti:

$$\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{d}\tau^2 + a(\tau)^2\,\boldsymbol{q}$$

τ – kosmologický čas
$\boldsymbol{q}$ – metrika homogenního isotropního prostorového řezu
$a(\tau)$ – ‘poloměr’ vesmíru v čase τ

- poloměr $a(\tau)$ závisí na typu hmoty ve vesmíru a kosmologické konstantě
- poloměr v jednotlivých fázích vývoje závisí na dominující složce hmoty
- pouze 5% běžné baryonové hmoty
- v pozdních fázích vesmíru je dominující *kosmologická konstanta*

– obrázek pro Wikipedia.org Pablo Carlos Budassi

stáří vesmíru = $13,8$ Gyr

pozorovatelná velikost = 28.5 Gpc

Hubblova konstanta = 68 km/s/Mpc

hustota = $0,86 \cdot 10^{-26}$ kg/m^3

rel. hustota $\Omega_{\mathrm{tot}} = 1,0023 \pm 0,005$

($\Rightarrow$ prostorově plochý vesmír)

zastoupení hmoty = $30,9\%$

z toho baryonová hmota = $4,9\%$

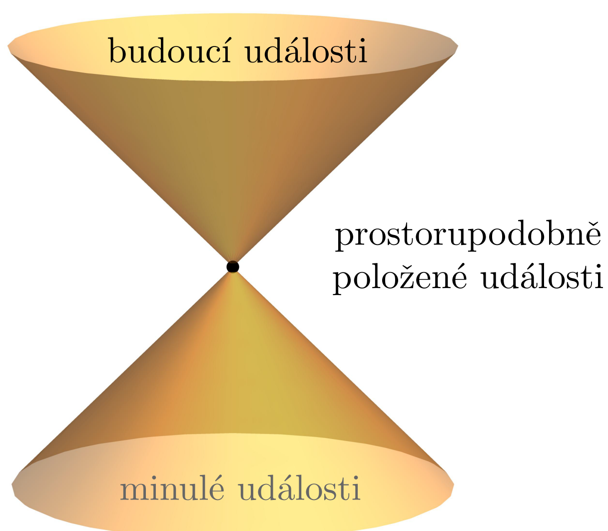
zastoupení záření < $0,6\%$

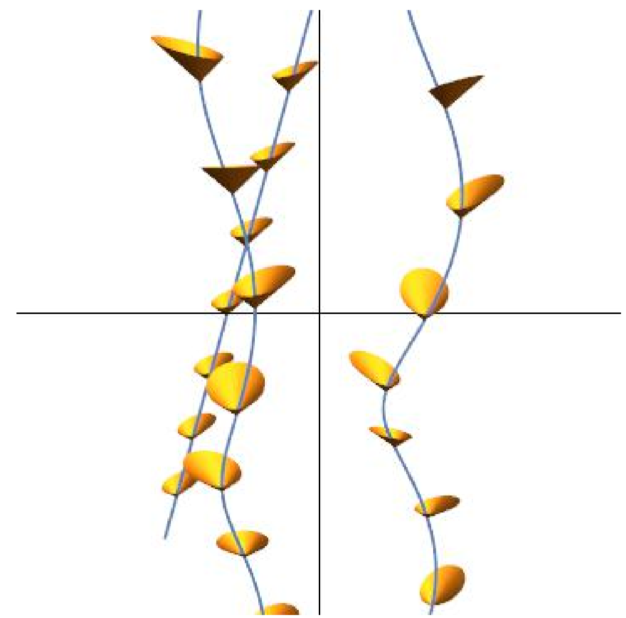
kosmologická konstanta > 69.1%

podle analýzy Planck Collaboration

Kauzální struktura prostoročasu

- Pojmy "*před*", "*po*" a "*možnost příčinné souvislosti*"
- Konečná maximální rychlost šíření fyzikálního signálu
- Neexistence jednoznačně definované současnosti
- **Zakřivení prostoročasu (gravitace) může změnit globální charakter kauzální struktury**

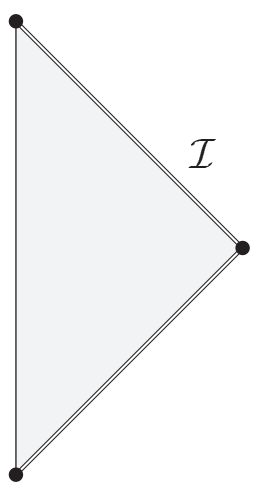




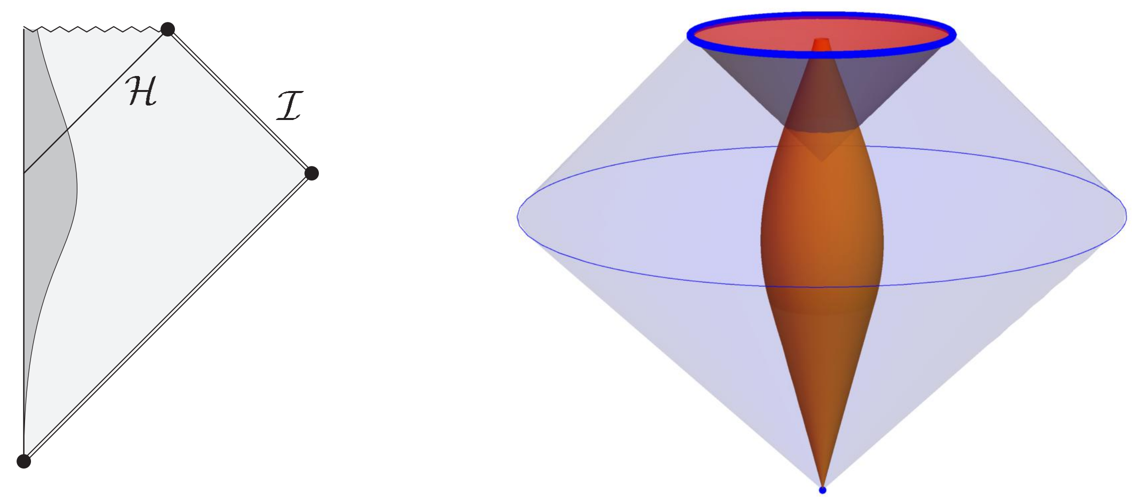
Černé díry

Černá díra **= oblast, ze které fyzikální signál nemůže uniknout do nekonečna**

- černá díra je dána globální kauzální strukturou
- statická černá díra je charakterizována pouze *hmotností*, *nábojem* a *rotací*
- černá díra popisuje konečné stádium gravitačního kolapsu velmi hmotných objektů
- vysoce symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic



konformní diagram
Minkowského prostoročasu

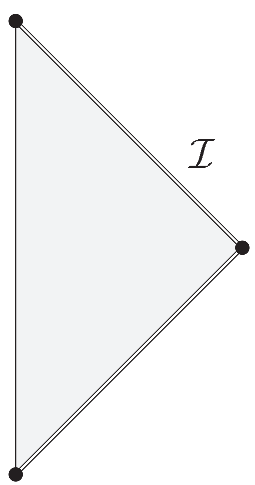


konformní diagram gravitačního kolapsu sférického tělesa

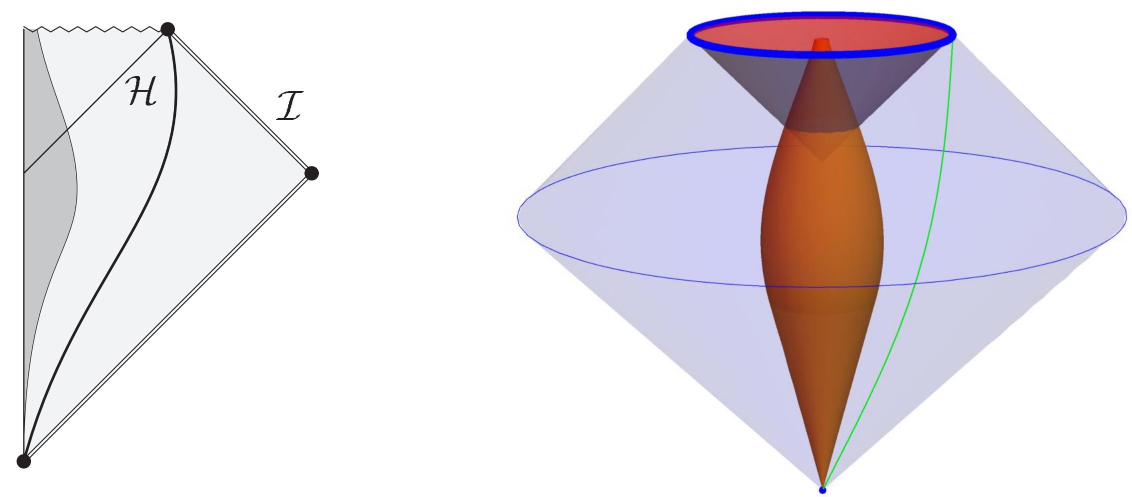
Černé díry

Černá díra **= oblast, ze které fyzikální signál nemůže uniknout do nekonečna**

- černá díra je dána globální kauzální strukturou
- statická černá díra je charakterizována pouze *hmotností*, *nábojem* a *rotací*
- černá díra popisuje konečné stádium gravitačního kolapsu velmi hmotných objektů
- vysoce symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic



konformní diagram
Minkowského prostoročasu

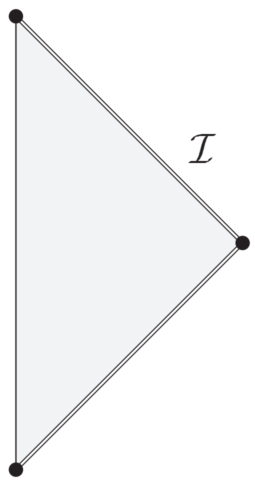


konformní diagram gravitačního kolapsu sférického tělesa

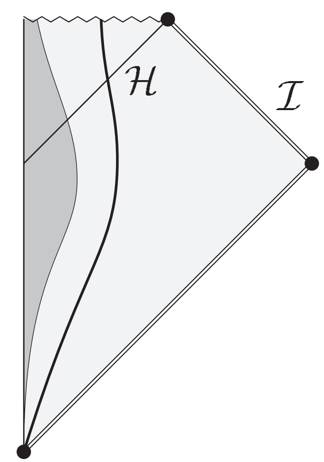
Černé díry

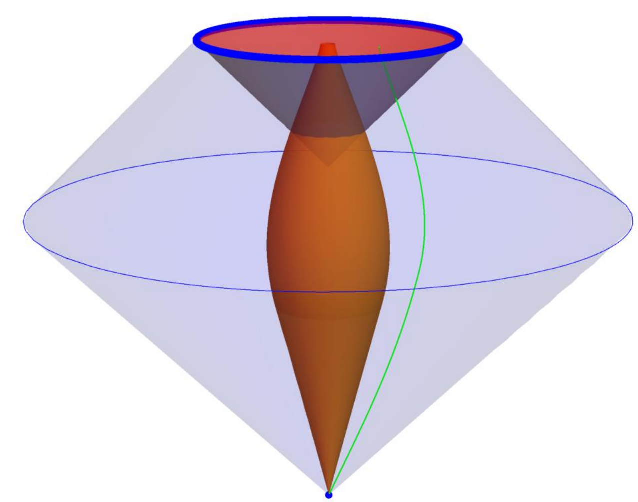
Černá díra **= oblast, ze které fyzikální signál nemůže uniknout do nekonečna**

- černá díra je dána globální kauzální strukturou
- statická černá díra je charakterizována pouze *hmotností*, *nábojem* a *rotací*
- černá díra popisuje konečné stádium gravitačního kolapsu velmi hmotných objektů
- vysoce symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic



konformní diagram
Minkowského prostoročasu



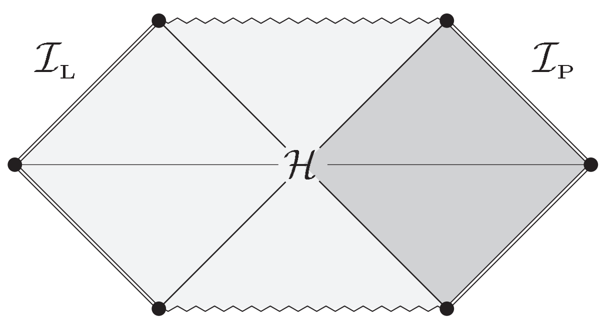


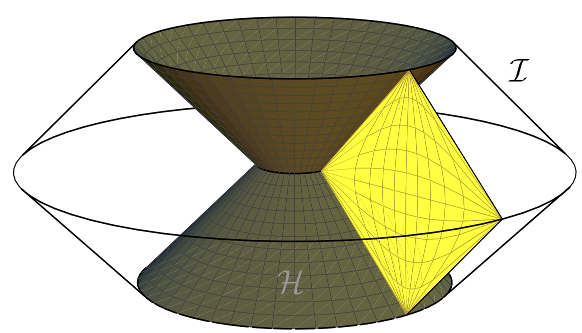
konformní diagram gravitačního kolapsu sférického tělesa

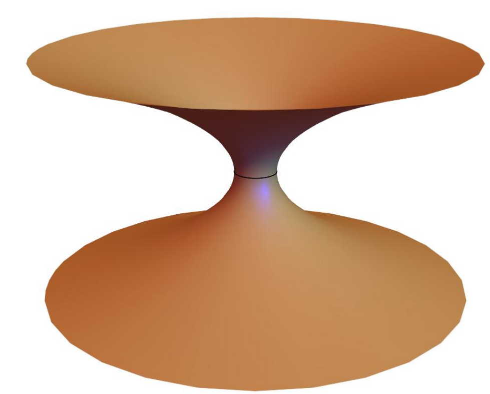
Černé díry

Černá díra **= oblast, ze které fyzikální signál nemůže uniknout do nekonečna**

- černá díra je dána globální kauzální strukturou
- statická černá díra je charakterizována pouze *hmotností*, *nábojem* a *rotací*
- černá díra popisuje konečné stádium gravitačního kolapsu velmi hmotných objektů
- vysoce symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic







maximální analytické rozšíření vakuového prostoročasu černé díry

Černé díry kolem nás:

Stelární černé díry

vznikají kolapsem hmotných hvězd

hmotnosti 1,5–100 $M_\odot$

zástupce: Cygnus X-1

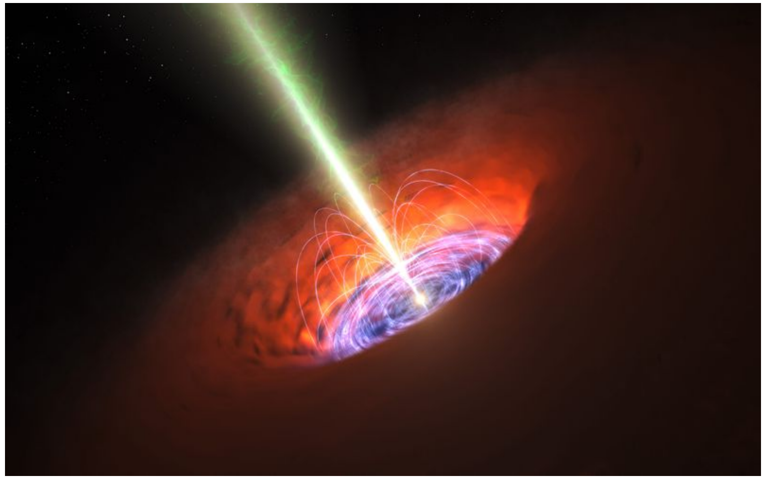
ESA for the NASA/ESA Hubble Space Telescope

Superhmotné černé díry

obrovské díry tvoříci jádra galaxií

hmotnosti 10^6–10^9 $M_\odot$

zástupce: díra v centru naší galaxie



Wikimedia Commons

Jak o černých dírách víme: stelární černé díry

Srážka a splynutí černých děr

– naměřeno přímou detekcí emitovaných gravitačních vln

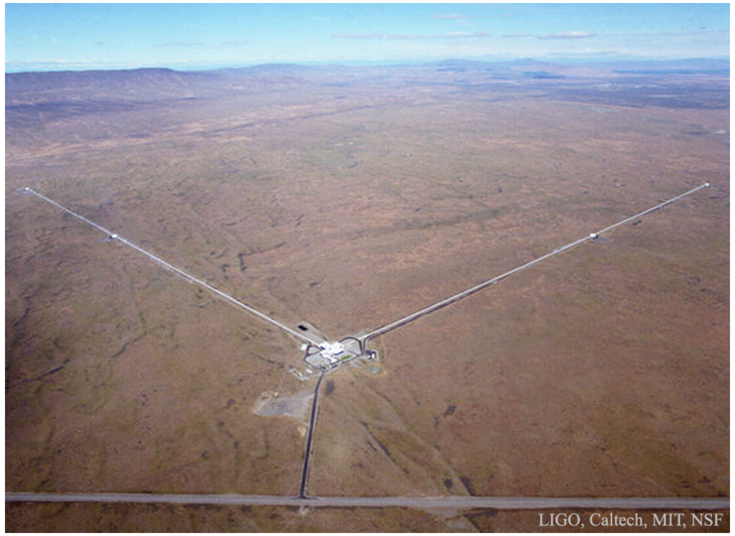
simulace splynutí 2 černých děr – LIGO & SXS

GW150914 (14. září 2015)

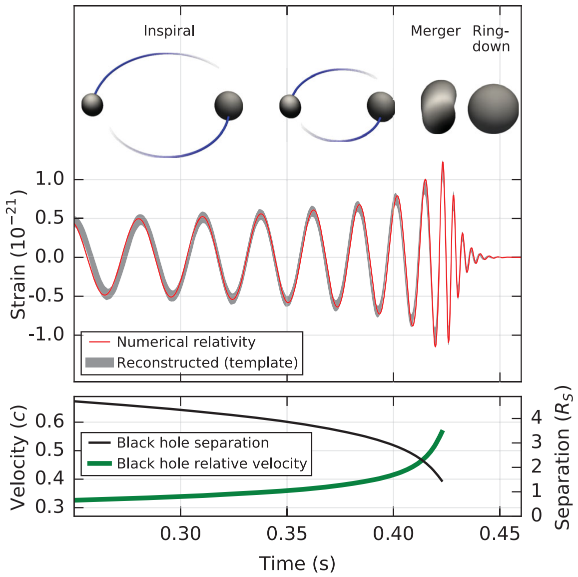
hmotnosti: $M_1 = 36 \pm 5 M_\odot$ $M_2 = 29 \pm 4 M_\odot$ $\Rightarrow$ $M = 62 \pm 4 M_\odot$

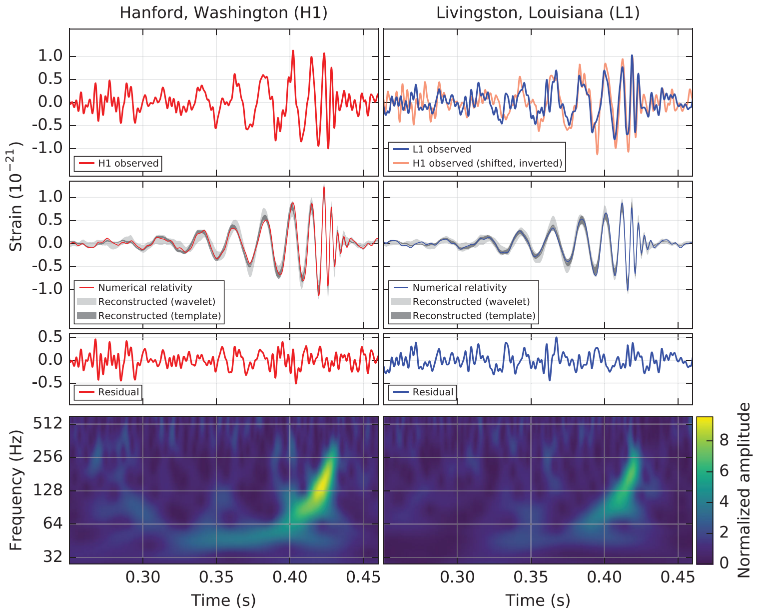
rotace: $a = 0.67 M$

vzdálenost: $d \sim 1.2 \cdot 10^9$ ly



detektor v Hanfordu – LIGO





LIGO & VIRGO, Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 061102

Jak o černých dírách víme: superhmotné černé díry

Gravitační působení na okolní tělesa

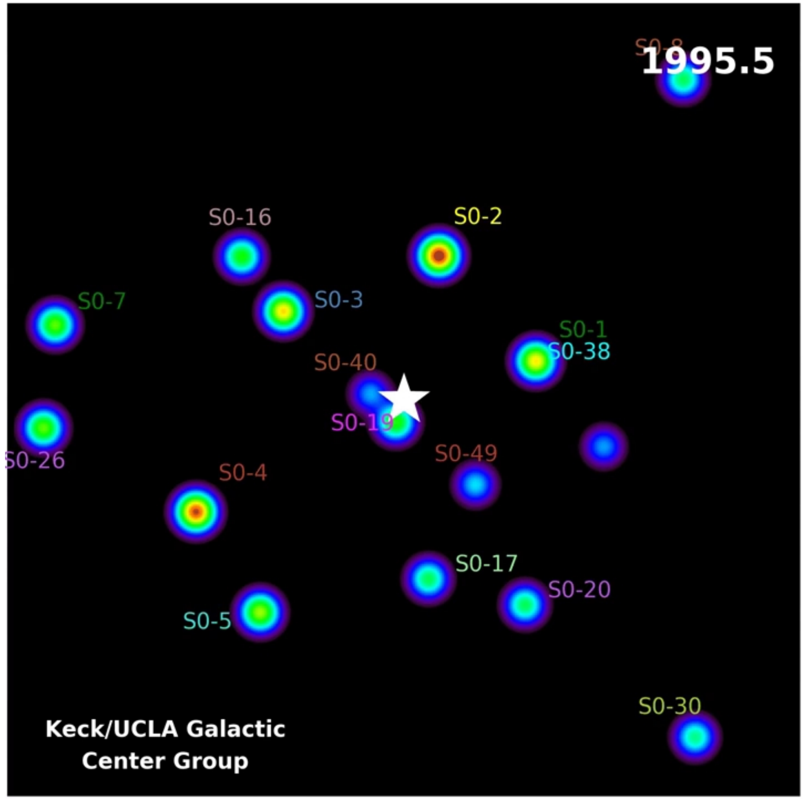
centrum Mléčné dráhy

(Sagittarius A*, 26000 ly)

- animace:
  dráhy hvězd v 0.5 arcsec okolí centra naší galaxie
  pozorování z let 1995–2016
- hvězda S0-2:
  doba oběhu = 15.56 let
  nejbližší vzdálenost k centru = 17 lh = 120 AU
  hmotnost = $15 M_\odot$
- centrální objekt:
  $> 95\%$ hmotnosti ovlivňující pohyb hvězd
  hmotnost = $4.3 \cdot 10^6\, M_\odot$
  velikost < 6.25 lh = 45 AU

$\Downarrow$

superhmotná černá díra



A. Ghez, Keck/UCLA Galactic Center Group

Gravitace ve vyšších dimenzích

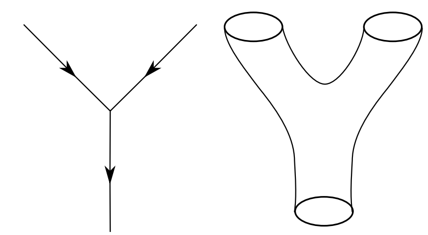
K čemu vyšší dimenze?

- teorie strun
- AdS/CFT korespondence
- D-bránové modely
- zkoumání matematických souvislostí

▷ částice jako kvantové excitace fundamentálních strun

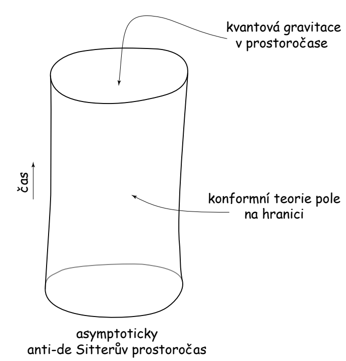
▷ naděje na ‘automatickou’ renormalizaci teorie

▷ *kvantování strun je konzistentní pouze v jistých dimenzích*



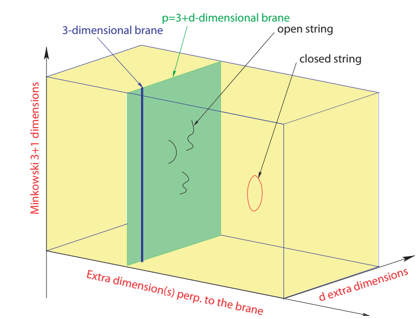
Wikimedia Commons

AdS/CFT korespondence



dualita mezi kvantovou gravitací v asymptoticky AdS prostoročase a teorií pole na hranici

bránové modely



I. Antoniadis: J.Phys.Conf.Ser. 33 (2006) 170

náš 4D prostoročas jako ‘brána’ ve vícedimenzionálním prostoru

Gravitace ve vyšších dimenzích

K čemu vyšší dimenze?

- teorie strun
- AdS/CFT korespondence
- D-bránové modely
- **zkoumání matematických souvislostí**

▷ jsou 4 prostoročasové dimenze speciální?
▷ Lovelockovo zobecnění Einsteinovy gravitace
▷ Hornedského teorie skalárních polí
▷ topologická gravitace ve 2+1 dimenzích
▷ černé díry ve 3, 4 a vyšších dimenzích
▷ bohatá struktura symetrií černých děr ve vyšších dimenzích

Gravitace ve vyšších dimenzích

K čemu vyšší dimenze?

- **zkoumání matematických souvislostí**

  ▷ jsou 4 prostoročasové dimenze speciální?

  ▷ Lovelockovo zobecnění Einsteinovy gravitace

  ▷ Hornedského teorie skalárních polí

  ▷ topologická gravitace ve 2+1 dimenzích

  ▷ černé díry ve 3, 4 a vyšších dimenzích

  ▷ **bohatá struktura symetrií černých děr ve vyšších dimenzích**

hlavní motivace:

struktura symetrií určuje geometrii černoděrových prostoročasů

Symetrie geometrie = symetrie geodetického pohybu

Symmetrie na konfiguračním prostoru

konfigurační prostor M = prostor poloh

- generátor symetrie $\boldsymbol{l}$
- symetrie zachovává metriku – isometrie
  $\pounds_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{g} = 0$

Symetrie geometrie = symetrie geodetického pohybu

Symmetrie na konfiguračním prostoru $\Rightarrow$ Explicitní symmetrie

konfigurační prostor M = prostor poloh

- generátor symetrie $\boldsymbol{l}$
- symetrie zachovává metriku – isometrie
  $\pounds_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{g} = 0$

zachovávající veličina lineární v hybnosti $\boldsymbol{p}$

$$L = \boldsymbol{l}^a \boldsymbol{p}_a$$

$\boldsymbol{l}$ – **Killingův vektor**

Symetrie geometrie = symetrie geodetického pohybu

Symmetrie na konfiguračním prostoru ⇒ Explicitní symmetrie

konfigurační prostor M = prostor poloh

- generátor symetrie $\boldsymbol{l}$
- symetrie zachovává metriku – isometrie
  $\pounds_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{g} = 0$

zachovávající veličina lineární v hybnosti $\boldsymbol{p}$

$$L = \boldsymbol{l}^a \boldsymbol{p}_a$$

$\boldsymbol{l}$ – **Killingův vektor**

Symmetrie na fázovém prostoru

fázový prostor Γ = prostor poloh a hybností

- generátor symetrie $\boldsymbol{X}_K$
- symplektomorfismus komutující s Hamiltoniánem
  $\{K, H\} = 0$
- K je zachovávající veličina
- Hamiltonián určený metrikou $H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{g}^{ab}\boldsymbol{p}_a\boldsymbol{p}_b$

symetrie je generovaná zachovávající se veličinou

Symetrie geometrie = symetrie geodetického pohybu

Symmetrie na konfiguračním prostoru $\Rightarrow$ Explicitní symmetrie

konfigurační prostor M = prostor poloh

- generátor symetrie $\boldsymbol{l}$
- symetrie zachovává metriku – isometrie
  $\pounds_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{g} = 0$

zachovávající veličina lineární v hybnosti $\boldsymbol{p}$

$$L = \boldsymbol{l}^a \boldsymbol{p}_a$$

$\boldsymbol{l}$ – **Killingův vektor**

Symmetrie na fázovém prostoru $\Rightarrow$ Skryté symmetrie

fázový prostor Γ = prostor poloh a hybností

- generátor symetrie $\boldsymbol{X}_K$
- symplektomorfismus komutující s Hamiltoniánem
  $\{K, H\} = 0$
- K je zachovávající veličina
- Hamiltonián určený metrikou $H = \frac{1}{2m} \boldsymbol{g}^{ab} \boldsymbol{p}_a \boldsymbol{p}_b$

zachovávající veličina monomiální v hybnosti $\boldsymbol{p}$

$$K = \boldsymbol{k}^{a_1 \dots a_p} \boldsymbol{p}_{a_1} \cdots \boldsymbol{p}_{a_p}$$

$\boldsymbol{k}$ – **Killingův tenzor**

Objekty zachycující symetrie

Killingovy vektory

$\boldsymbol{l}$ je Killingův vektor pokud

$$\pounds_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{g} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}^{(a} \boldsymbol{l}^{b)} = 0$$

Killingovy tenzory

$\boldsymbol{k}$ je Killingův tenzor stupně p pokud

$$\boldsymbol{k}^{a_1 \dots a_p} = \boldsymbol{k}^{(a_1 \dots a_p)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^{(a_0} \boldsymbol{k}^{a_1 \dots a_p)} = 0$$

- Killingův vektor je Killingův tenzor stupně 1
- Existence Killingových tenzorů je vysoce netriviální omezení na geometrii
- Killingovy tenzory mohou být poskládány z elementárnějších stavebních kamenů

Objekty zachycující symetrie

Killingovy vektory

$\boldsymbol{l}$ je Killingův vektor pokud

$$\pounds_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{g} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}^{(a}\boldsymbol{l}^{b)} = 0$$

Killingovy tenzory

$\boldsymbol{k}$ je Killingův tenzor stupně p pokud

$$\boldsymbol{k}^{a_1\dots a_p} = \boldsymbol{k}^{(a_1\dots a_p)}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^{(a_0}\boldsymbol{k}^{a_1\dots a_p)} = 0$$

- Killingův vektor je Killingův tenzor stupně 1
- Existence Killingových tenzorů je vysoce netriviální omezení na geometrii
- Killingovy tenzory mohou být poskládány z elementárnějších stavebních kamenů

konformní Killingovy–Yanovy formy

Konformní Killingovy–Yanovy formy

Rozštěpení kovariantní derivace antisymetrické formy

$$(\mathcal{A}\sigma)_{aa_1\dots a_p} = \sigma_{[aa_1\dots a_p]}$$

$$(\mathcal{C}\sigma)_{aa_1\dots a_p} = \frac{p}{D-p+1} g_{a[a_1}\sigma^b{}_{|b|a_2\dots a_p]}$$

$$(\mathcal{T}\sigma)_{aa_1\dots a_p} = \sigma_{aa_1\dots a_p} - \sigma_{[aa_1\dots a_p]} - \frac{p}{D-p+1} g_{a[a_1}\sigma^b{}_{|b|a_2\dots a_p]}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} + \mathcal{C}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} + \mathcal{T}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}$$

$\boldsymbol{d\omega}$ antisymmetrická část

$\boldsymbol{\delta\omega}$ divergentní část

$\mathbf{T}\boldsymbol{\omega}$ twistorový operátor

Konformní Killingovy–Yanovy formy

Rozštěpení kovariantní derivace antisymetrické formy

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \underbrace{\mathcal{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{d}\omega} + \underbrace{\mathcal{C}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{\delta}\omega} + \underbrace{\mathcal{T}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{T}\omega}$$

$$(\mathcal{A}\sigma)_{aa_1\dots a_p} = \sigma_{[aa_1\dots a_p]}$$

$$(\mathcal{C}\sigma)_{aa_1\dots a_p} = \frac{p}{D-p+1} g_{a[a_1}\sigma^b{}_{|b|a_2\dots a_p]}$$

$$(\mathcal{T}\sigma)_{aa_1\dots a_p} = \sigma_{aa_1\dots a_p} - \sigma_{[aa_1\dots a_p]} - \frac{p}{D-p+1} g_{a[a_1}\sigma^b{}_{|b|a_2\dots a_p]}$$

obecné formy	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} + \mathcal{C}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} + \mathcal{T}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}$	
uzavřené formy	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{C}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} + \mathcal{T}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega} = 0$
ko-uzavřené formy	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} + \mathcal{T}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\omega} = 0$
konformní Killingovy–Yanovy formy	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} + \mathcal{C}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{T}\boldsymbol{\omega} = 0$
Killingovy–Yanovy formy	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{A}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{T}\boldsymbol{\omega} = 0\,,\ \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\omega} = 0$
uzavřené konf. Killingovy–Yanovy formy	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{C}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{T}\boldsymbol{\omega} = 0\,,\ \boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega} = 0$
harmonické formy	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{T}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,,\ \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\omega} = 0$
kovariantně konstantní formy	$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = 0$	$\boldsymbol{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,,\ \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\omega} = 0\,,\ \mathbf{T}\boldsymbol{\omega} = 0$

Vlastnosti Killingových–Yanových forem

Killingovy–Yanovy formy

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\kappa}$$

uzavřené konf. Killingovy–Yanovy formy

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\, \boldsymbol{h} = \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\xi}$$

$$\boldsymbol{f} \qquad \overset{*}{\longleftrightarrow} \qquad *\boldsymbol{f}$$

$$*\boldsymbol{h} \qquad\qquad \boldsymbol{h}$$

Hodgova dualita

$$\boldsymbol{k}^{ab} = \boldsymbol{f}_1{}^{(a}{}_{c_2\dots c_p}\, \boldsymbol{f}_2{}^{b)c_2\dots c_p}$$

je Killingův tenzor

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 \wedge \boldsymbol{h}_2$$

je uzavřená konf. Killingova–Yanova forma

Vlastnosti Killingových–Yanových forem

Killingovy–Yanovy formy

$$\nabla_X f = X \cdot \kappa$$

uzavřené konf. Killingovy–Yanovy formy

$$\nabla_X h = X \wedge \xi$$

$$f \qquad \overset{*}{\longleftrightarrow} \qquad *f$$

$$*h \qquad \qquad h$$

Hodgova dualita

$$k^{ab} = f_1{}^{(a}{}_{c_2 \ldots c_p} f_2{}^{b) c_2 \ldots c_p}$$

je Killingův tenzor

$$h = h_1 \wedge h_2$$

je uzavřená konf. Killingova–Yanova forma

Vlastnosti Killingových–Yanových forem

Killingovy–Yanovy formy

$$\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{f} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\kappa}$$

uzavřené konf. Killingovy–Yanovy formy

$$\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{h} = \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\xi}$$

$\boldsymbol{f}$ $\quad \overset{*}{\longleftrightarrow} \quad$ $*\boldsymbol{f}$

$*\boldsymbol{h}$ $\quad$ Hodgova dualita $\quad$ $\boldsymbol{h}$

$$\boldsymbol{k}^{ab} = \boldsymbol{f}_1{}^{(a}{}_{c_2 \dots c_p} \boldsymbol{f}_2{}^{b) c_2 \dots c_p}$$

je Killingův tenzor

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 \wedge \boldsymbol{h}_2$$

je uzavřená konf. Killingova–Yanova forma

Vlastnosti Killingových–Yanových forem

Killingovy–Yanovy formy

$$\nabla_X \boldsymbol{f} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\kappa}$$

$\boldsymbol{f}$

$*\boldsymbol{h}$

$\overset{*}{\longleftrightarrow}$

Hodgova dualita

uzavřené konf. Killingovy–Yanovy formy

$$\nabla_X \boldsymbol{h} = \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\xi}$$

$*\boldsymbol{f}$

$\boldsymbol{h}$

$$\boldsymbol{k}^{ab} = \boldsymbol{f}_1{}^{(a}{}_{c_2 \dots c_p} \boldsymbol{f}_2{}^{b) c_2 \dots c_p}$$

je Killingův tenzor

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 \wedge \boldsymbol{h}_2$$

je uzavřená konf. Killingova–Yanova forma

Základní (principal) tenzor

Základní tenzor $\boldsymbol{h}$ je nedegenerovaná uzavřená konformní Killingova–Yanova 2-forma

$$\boldsymbol{\nabla}_c \boldsymbol{h}_{ab} = \boldsymbol{g}_{ca} \boldsymbol{\xi}_b - \boldsymbol{g}_{cb} \boldsymbol{\xi}_a \qquad\qquad \boldsymbol{\xi}_a = \frac{1}{D-1} \boldsymbol{\nabla}^b \boldsymbol{h}_{ba}$$

Darboux báze $(\boldsymbol{e}^\mu, \hat{\boldsymbol{e}}^\mu)$

$$\boldsymbol{h} = \sum_{\mu=1}^{N} x_\mu \, \boldsymbol{e}^\mu \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^\mu$$

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N} \big(\boldsymbol{e}^\mu \boldsymbol{e}^\mu + \hat{\boldsymbol{e}}^\mu \hat{\boldsymbol{e}}^\mu \big)$$

nedegenerace:
x_μ jsou funkcionálně nezávislé funkce

sudá dimenze $D = 2N$
$\mu = 1, \ldots, N$

Primární Killingův vektor

Základní tenzor $\boldsymbol{h}$

$$\boldsymbol{\nabla}_c \boldsymbol{h}_{ab} = \boldsymbol{g}_{ca} \boldsymbol{\xi}_b - \boldsymbol{g}_{cb} \boldsymbol{\xi}_a$$

Primární Killingův vektor $\boldsymbol{\xi}$

$$\boldsymbol{\xi}_a = \frac{1}{D-1} \boldsymbol{\nabla}^b \boldsymbol{h}_{ba}$$

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{g} = 0$$

$\boldsymbol{\xi}$ je Killingův vektor

$\Uparrow$

netriviální důsledek podmínek integrability rovnice pro základní tenzor

$$\pounds_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{h} = 0$$

$\boldsymbol{\xi}$ zachovává základní tenzor

$\Uparrow$

přímý důsledek rovnic pro základní tenzor

Killingova ‘věž’ symetrií

- **uzavřené konformní Killingovy–Yanovy formy $\boldsymbol{h}^{(j)}$ of rank $2j$:**

$$\boldsymbol{h}^{(j)} = \frac{1}{j!}\,\boldsymbol{h}^{\wedge j}$$

- **Killingovy–Yanovy formy $\boldsymbol{f}^{(j)}$ of rank $(D-2j)$:**

$$\boldsymbol{f}^{(j)} = *\boldsymbol{h}^{(j)}$$

- **Killingovy tenzory $\boldsymbol{k}_{(j)}$ stupně 2:**

$$\boldsymbol{k}_{(j)}^{ab} = \frac{1}{(D{-}2j{-}1)!}\,\boldsymbol{f}^{(j)a}{}_{c_1\dots c_{D-2j-1}}\,\boldsymbol{f}^{(j)bc_1\dots c_{D-2j-1}}$$

- **Killingovy vektory $\boldsymbol{l}_{(j)}$:**

$$\boldsymbol{l}_{(j)} = \boldsymbol{k}_{(j)} \cdot \boldsymbol{\xi}$$

Killingova ‘věž’ symetrií

- **uzavřené konformní Killingovy–Yanovy formy $\boldsymbol{h}^{(j)}$ of rank $2j$:**

$$\boldsymbol{h}^{(j)} = \frac{1}{j!}\,\boldsymbol{h}^{\wedge j}$$

- **Killingovy–Yanovy formy $\boldsymbol{f}^{(j)}$ of rank $(D-2j)$:**

$$\boldsymbol{f}^{(j)} = *\boldsymbol{h}^{(j)}$$

- **Killingovy tenzory $\boldsymbol{k}_{(j)}$ stupně 2:**

$$\boldsymbol{k}_{(j)}^{ab} = \frac{1}{(D-2j-1)!}\,\boldsymbol{f}^{(j)a}{}_{c_1\dots c_{D-2j-1}}\,\boldsymbol{f}^{(j)bc_1\dots c_{D-2j-1}}$$

- **Killingovy vektory $\boldsymbol{l}_{(j)}$:**

$$\boldsymbol{l}_{(j)} = \boldsymbol{k}_{(j)}\cdot\boldsymbol{\xi}$$

Killingova ‘věž’ symetrií

- **uzavřené konformní Killingovy–Yanovy formy $\boldsymbol{h}^{(j)}$ of rank $2j$:**

$$\boldsymbol{h}^{(j)} = \frac{1}{j!}\,\boldsymbol{h}^{\wedge j}$$

- **Killingovy–Yanovy formy $\boldsymbol{f}^{(j)}$ of rank $(D-2j)$:**

$$\boldsymbol{f}^{(j)} = *\boldsymbol{h}^{(j)}$$

- **Killingovy tenzory $\boldsymbol{k}_{(j)}$ stupně 2:**

$$\boldsymbol{k}_{(j)}^{ab} = \frac{1}{(D-2j-1)!}\,\boldsymbol{f}^{(j)a}{}_{c_1\dots c_{D-2j-1}}\,\boldsymbol{f}^{(j)bc_1\dots c_{D-2j-1}}$$

- **Killingovy vektory $\boldsymbol{l}_{(j)}$:**

$$\boldsymbol{l}_{(j)} = \boldsymbol{k}_{(j)}\cdot\boldsymbol{\xi}$$

Killingova ‘věž’ symetrií

- **uzavřené konformní Killingovy–Yanovy formy $\boldsymbol{h}^{(j)}$ of rank $2j$:**

$$\boldsymbol{h}^{(j)} = \frac{1}{j!}\,\boldsymbol{h}^{\wedge j}$$

- **Killingovy–Yanovy formy $\boldsymbol{f}^{(j)}$ of rank $(D-2j)$:**

$$\boldsymbol{f}^{(j)} = *\boldsymbol{h}^{(j)}$$

- **Killingovy tenzory $\boldsymbol{k}_{(j)}$ stupně 2:**

$$\boldsymbol{k}_{(j)}^{ab} = \frac{1}{(D{-}2j{-}1)!}\,\boldsymbol{f}^{(j)a}{}_{c_1\dots c_{D-2j-1}}\,\boldsymbol{f}^{(j)bc_1\dots c_{D-2j-1}}$$

- **Killingovy vektory $\boldsymbol{l}_{(j)}$:**

$$\boldsymbol{l}_{(j)} = \boldsymbol{k}_{(j)}\cdot\boldsymbol{\xi}$$

Killingova ‘věž’ symetrií

- Killingovy tenzory $\boldsymbol{k}_{(j)}$ stupně 2 **Skryté symetrie**
- Killingovy vektory $\boldsymbol{l}_{(j)}$ **Explicitní symetrie**

$$j = 0, \dots, N-1$$

Symmetrie komutují ve smyslu Nijenhuisovy–Schoutenovy závorky

$$\big[\boldsymbol{k}_{(i)}, \boldsymbol{k}_{(j)}\big]_{\mathrm{NS}} = 0 \qquad \big[\boldsymbol{k}_{(i)}, \boldsymbol{l}_{(j)}\big]_{\mathrm{NS}} = 0 \qquad \big[\boldsymbol{l}_{(i)}, \boldsymbol{l}_{(j)}\big]_{\mathrm{NS}} = 0$$

$$\Uparrow$$

netriviální důsledek definic Killingovy věže, rovnice základního tenzoru a jejích podmínek integrability

Geometrie připouštějící základní tenzor

jednoznačnost geometrie

z existence základního tenzoru lze odvodit tvar metriky závisející pouze na N funkcích X_μ jedné proměnné

tyto funkce jsou určeny Einsteinovým gravitačním zákonem

Off-shell Kerr–NUT–(A)dS geometrie

pro jednoduchost
pouze v sudé dimenzi
$D = 2N$

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N} \left[\frac{U_\mu}{X_\mu} \boldsymbol{d}x_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)} \boldsymbol{d}\psi_j \Big)^2 \right]$$

explicitní funkce polynomiální v souřadnicích x_μ (symetrické polynomy)

$$A^{(k)} = \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_k=1 \\ \nu_1<\dots<\nu_k}}^{N} x_{\nu_1}^2 \dots x_{\nu_k}^2 \qquad A_\mu^{(j)} = \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_j=1 \\ \nu_1<\dots<\nu_j \\ \nu_i\neq\mu}}^{N} x_{\nu_1}^2 \dots x_{\nu_j}^2 \qquad U_\mu = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{N} (x_\nu^2 - x_\mu^2)$$

N neurčených metrických funkcí jedné proměnné

$$X_\mu = X_\mu(x_\mu)$$

On-shell Kerr–NUT–(A)dS geometrie

pro jednoduchost
pouze v sudé dimenzi
$D = 2N$

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N} \left[\frac{U_\mu}{X_\mu} \boldsymbol{d}x_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)} \boldsymbol{d}\psi_j \Big)^2 \right]$$

Einsteinův gravitační zákon $\Rightarrow$

$$X_\mu = \lambda \prod_{\nu=1}^{N} (a_\nu^2 - x_\mu^2) - 2b_\mu\, x_\mu = \lambda\, \mathcal{J}(x_\mu^2) - 2b_\mu x_\mu$$

Parametry:

λ	parametr daný kosmologickou konstantou $\Lambda = (2N-1)(N-1)\lambda$
b_μ	hmotnost a NUT parametry
a_μ	rotační parametry

volnost v reparametrizaci souřadnic $\Rightarrow$ jeden parametr lze zvolit kalibrační podmínkou

přesná interpretace parametrů závisí na definičních oborech souřadnic, signatuře a kalibrační podmínce

On-shell Kerr–NUT–(A)dS geometrie

pro jednoduchost
pouze v sudé dimenzi
$D = 2N$

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N} \left[\frac{U_\mu}{X_\mu} \boldsymbol{d}x_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)} \boldsymbol{d}\psi_j \Big)^2 \right]$$

Definiční obory souřadnic:

- x_μ mezi sousedními kořeny X_μ

  pro $b_\mu = 0$ kořeny X_μ jsou a_μ

  $x_\mu \in (a_{\mu-1}, a_\mu)$

  (předpoklád $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$)

- ψ_j – killingovské souřadnice
  ϕ_μ – každá lineární kombinace ψ_j je též killingovskou souřadnicí

  periodicita vhodně zvolených souřadnic ϕ_μ garantuje regularitu os rotací

  regularita na celých osách rotace lze zajistit pouze pro nulové NUT parametry

Kerr–NUT–(A)dS geometrie – lorentzovská signatura

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N} \left[\frac{U_\mu}{X_\mu} \boldsymbol{d}x_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)} \boldsymbol{d}\psi_j \Big)^2 \right]$$

Wickova rotatace:

čas: $\tau = \psi_0$ radiální souřadnice: $x_N = ir$ hmotnost: $b_N = im$

Kalibrační podmínka:

$a_N^2 = -\frac{1}{\lambda}$ (potřebné pro limitu $\lambda \to 0$)

Nové killingovské souřadnice:

$$t = \tau + \sum_{\bar{k}} \bar{\mathcal{A}}^{(\bar{k}+1)} \bar{\psi}_{\bar{k}} \qquad \frac{\phi_{\bar{\mu}}}{a_{\bar{\mu}}} = \lambda\tau - \sum_{\bar{k}} \big(\bar{\mathcal{A}}_{\bar{\mu}}^{(\bar{k})} - \lambda \bar{\mathcal{A}}_{\bar{\mu}}^{(\bar{k}+1)} \big) \bar{\psi}_{\bar{k}}$$

pruhované veličiny odpovídají indexům probíhajícím o jednu hodnotu méně: $N \to \bar{N} = N - 1$

(i.e., $\bar{\mu} = 1, \dots, \bar{N}$ and $\bar{j} = 0, \dots, \bar{N} - 1$, etc.)

Kerr–NUT–(A)dS geometrie – lorentzovská signatura

$$\boldsymbol{g} = -\frac{\Delta_r}{\Sigma}\left(\prod_{\bar\nu}\frac{1+\lambda x_{\bar\nu}^2}{1+\lambda a_{\bar\nu}^2}\,\boldsymbol{d}t - \sum_{\bar\nu}\frac{\bar J(a_{\bar\nu}^2)}{a_{\bar\nu}(1+\lambda a_{\bar\nu}^2)\bar{\mathcal{U}}_{\bar\nu}}\boldsymbol{d}\phi_{\bar\nu}\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r}\,\boldsymbol{d}r^2$$

$$+\sum_{\bar\mu}\frac{(r^2{+}x_{\bar\mu}^2)}{\Delta_{\bar\mu}/\bar U_{\bar\mu}}\,\boldsymbol{d}x_{\bar\mu}^2 + \sum_{\bar\mu}\frac{\Delta_{\bar\mu}/\bar U_{\bar\mu}}{(r^2{+}x_{\bar\mu}^2)}\left(\frac{1{-}\lambda r^2}{1{+}\lambda x_{\bar\mu}^2}\prod_{\bar\nu}\frac{1{+}\lambda x_{\bar\nu}^2}{1{+}\lambda a_{\bar\nu}^2}\,\boldsymbol{d}t + \sum_{\bar\nu}\frac{(r^2{+}a_{\bar\nu}^2)\bar J_{\bar\mu}(a_{\bar\nu}^2)}{a_{\bar\nu}(1{+}\lambda a_{\bar\nu}^2)\,\bar{\mathcal{U}}_{\bar\nu}}\boldsymbol{d}\phi_{\bar\nu}\right)^2$$

$$\Delta_r = -X_N = \big(1{-}\lambda r^2\big)\prod_{\bar\nu}\big(r^2{+}a_{\bar\nu}^2\big) - 2mr \qquad \Sigma = U_N = \prod_{\bar\nu}(r^2 + x_{\bar\nu}^2)$$

$$\Delta_{\bar\mu} = -X_{\bar\mu} = \big(1{+}\lambda x_{\bar\mu}^2\big)\bar{\mathcal{J}}(x_{\bar\mu}^2) + 2b_{\bar\mu}x_{\bar\mu} \qquad \bar U_{\bar\mu} = \prod_{\substack{\bar\nu \\ \bar\nu\neq\bar\mu}}(x_{\bar\nu}^2 - x_{\bar\mu}^2)$$

$$\bar{\mathcal{J}}(x^2) = \prod_{\bar\nu}(a_{\bar\nu}^2 - x^2) \qquad \bar J_{\bar\mu}(a^2) = \prod_{\substack{\bar\nu \\ \bar\nu\neq\bar\mu}}(x_{\bar\nu}^2 - a^2)$$

Schwarzschildova–Tangherliniho metrika: $b_{\bar{\mu}} = 0 \quad a_\mu = 0$

$$\boldsymbol{g} = -\big(1 - \lambda r^2 - 2mr^{3-2N}\big)\,\boldsymbol{d}t^2 + \frac{1}{1 - \lambda r^2 - 2mr^{3-2N}}\,\boldsymbol{d}r^2 + r^2\,\boldsymbol{d\Omega}^2_{\bar{N}}$$

- Sféricky symetrická černá díra hmotnosti m v dimenzi $D = 2N$
- Horizonty dané kořeny metrické funkce
- Asymptotický charakter daný znaménkem parametru λ
- Radiální závislost je závislá na dimenzi

Základní tenzor $\Leftrightarrow$ off-shell Kerr–NUT–(A)dS metrika

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N} \left[\frac{U_\mu}{X_\mu}\, \boldsymbol{d}x_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)} \boldsymbol{d}\psi_j \Big)^2 \right]$$

explicitní funkce polynomiální v souřadnicích x_μ (symetrické polynomy)

$$A^{(k)} = \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_k=1\\ \nu_1<\dots<\nu_k}}^{N} x_{\nu_1}^2 \dots x_{\nu_k}^2 \qquad A_\mu^{(j)} = \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_j=1\\ \nu_1<\dots<\nu_j\\ \nu_i\neq\mu}}^{N} x_{\nu_1}^2 \dots x_{\nu_j}^2 \qquad U_\mu = \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{N} (x_\nu^2 - x_\mu^2)$$

N neurčených metrických funkcí jedné proměnné

$$X_\mu = X_\mu(x_\mu)$$

Základní tenzor $\Leftrightarrow$ off-shell Kerr–NUT–(A)dS metrika

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N}\Bigg[\,\frac{U_\mu}{X_\mu}\,\boldsymbol{d}x_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu}\Big(\sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)}\boldsymbol{d}\psi_j\Big)^2\,\Bigg]$$

explicitn

$A^{(k)} =$

$\nu_1,..$

$\nu_1<$

$$\boldsymbol{g} = -\frac{\Delta_r}{\Sigma}\Bigg(\prod_{\bar\nu}\frac{1+\lambda x_{\bar\nu}^2}{1+\lambda a_{\bar\nu}^2}\,\boldsymbol{d}t - \sum_{\bar\nu}\frac{\bar J(a_{\bar\nu}^2)}{a_{\bar\nu}(1+\lambda a_{\bar\nu}^2)\bar{\mathcal{U}}_{\bar\nu}}\boldsymbol{d}\phi_{\bar\nu}\Bigg)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r}\boldsymbol{d}r^2$$

$$+\sum_{\bar\mu}\frac{(r^2+x_{\bar\mu}^2)}{\Delta_{\bar\mu}/\bar U_{\bar\mu}}\,\boldsymbol{d}x_{\bar\mu}^2 + \sum_{\bar\mu}\frac{\Delta_{\bar\mu}/\bar U_{\bar\mu}}{(r^2+x_{\bar\mu}^2)}\Bigg(\frac{1-\lambda r^2}{1+\lambda x_{\bar\mu}^2}\prod_{\bar\nu}\frac{1+\lambda x_{\bar\nu}^2}{1+\lambda a_{\bar\nu}^2}\,\boldsymbol{d}t + \sum_{\bar\nu}\frac{(r^2+a_{\bar\nu}^2)\bar J_{\bar\mu}(a_{\bar\nu}^2)}{a_{\bar\nu}(1+\lambda a_{\bar\nu}^2)\bar{\mathcal{U}}_{\bar\nu}}\boldsymbol{d}\phi_{\bar\nu}\Bigg)^2$$

funkci jedné proměnné

$$X_\mu = X_\mu(x_\mu)$$

Základní tenzor $\quad\Leftrightarrow\quad$ off-shell Kerr–NUT–(A)dS metrika

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N} \left[\frac{U_\mu}{X_\mu}\,\boldsymbol{d}x_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu}\Big(\sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)}\boldsymbol{d}\psi_j \Big)^2 \right]$$

explicitní funkce polynomiální v souřadnicích x_μ (symetrické polynomy)

$$A^{(k)} = \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_k=1\\ \nu_1<\dots<\nu_k}}^{N} x_{\nu_1}^2 \dots x_{\nu_k}^2 \qquad A_\mu^{(j)} = \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_j=1\\ \nu_1<\dots<\nu_j\\ \nu_i\neq\mu}}^{N} x_{\nu_1}^2 \dots x_{\nu_j}^2 \qquad U_\mu = \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{N} (x_\nu^2 - x_\mu^2)$$

N neurčených metrických funkcí jedné proměnné

$$X_\mu = X_\mu(x_\mu)$$

Struktura symetrií off-shell Kerr–NUT–(A)dS geometrie

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{N} \left[\frac{U_\mu}{X_\mu}\, \boldsymbol{d}x_\mu^2 + \frac{X_\mu}{U_\mu} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)} \boldsymbol{d}\psi_j \Big)^2 \right]$$

Základní tenzor

$$\boldsymbol{h} = \sum_\mu x_\mu\, \boldsymbol{e}^\mu \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^\mu$$

Primární Killingův vektor

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\partial}_{\psi_0}$$

Skryté symetrie – Killingovy tenzory

$$\boldsymbol{k}_{(j)} = \sum_\mu A_\mu^{(j)} \left(\boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{e}_\mu + \hat{\boldsymbol{e}}_\mu \hat{\boldsymbol{e}}_\mu \right)$$

Explicitní symetrie – Killingovy vektory

$$\boldsymbol{l}_{(j)} = \boldsymbol{\partial}_{\psi_j}$$

Darboux báze

formy:

$$\boldsymbol{e}^\mu = \Big(\frac{U_\mu}{X_\mu}\Big)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{d}x_\mu \qquad \hat{\boldsymbol{e}}^\mu = \Big(\frac{X_\mu}{U_\mu}\Big)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{N-1} A_\mu^{(j)} \boldsymbol{d}\psi_j$$

vektory:

$$\boldsymbol{e}_\mu = \Big(\frac{X_\mu}{U_\mu}\Big)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\partial}_{x_\mu} \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_\mu = \Big(\frac{U_\mu}{X_\mu}\Big)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-x_\mu^2)^{N-1-k}}{U_\mu} \boldsymbol{\partial}_{\psi_k}$$

Důsledky pro fyzikální systémy: integrabilita a separabilita

- **Integrabilita geodetického pohybu**
- **Separabilita řešení Hamiltonovy–Jacobiho rovnice**
- **Separabilita řešení vlnové rovnice**
- **Separabilita řešení Diracovy rovnice**

Integrabilita geodetického pohybu

skryté a explicitní symetrie definují pozorovatelné kvadratické a lineární v hybnosti

$$\boldsymbol{k}_{(j)} \quad\Rightarrow\quad K_j = \boldsymbol{k}_{(j)}^{ab}\, \boldsymbol{p}_a \boldsymbol{p}_b \qquad\qquad \boldsymbol{l}_{(j)} \quad\Rightarrow\quad L_j = \boldsymbol{l}_{(j)}^{a}\, \boldsymbol{p}_a$$

$$\big[\boldsymbol{k}_{(i)}, \boldsymbol{k}_{(j)}\big]_{\mathrm{NS}} = 0 \qquad \big[\boldsymbol{k}_{(i)}, \boldsymbol{l}_{(j)}\big]_{\mathrm{NS}} = 0 \qquad \big[\boldsymbol{l}_{(i)}, \boldsymbol{l}_{(j)}\big]_{\mathrm{NS}} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\big\{K_i, K_j\big\} = 0 \qquad \big\{K_i, L_j\big\} = 0 \qquad \big\{L_i, L_j\big\} = 0$$

$$\boldsymbol{k}_{(0)} = \boldsymbol{g} \quad\Rightarrow\quad K_0 \propto H$$

K_j **a** L_j **se zachovávají a jsou v involuci**

$$\Downarrow$$

úplná integrabilita

Separabilita řešení Hamiltonovy–Jacobiho rovnice

Statická Hamiltonova–Jacobiho rovnice

$$H(x, \boldsymbol{d}S) = E$$

Zobecněné Hamiltonovy–Jacobiho rovnice pro zachovávající veličiny

$$\boldsymbol{d}S \cdot \boldsymbol{k}_{(j)} \cdot \boldsymbol{d}S = K_j \qquad\qquad \boldsymbol{l}_{(j)} \cdot \boldsymbol{d}S = L_j$$

Separabilita řešení Hamiltonovy–Jacobiho rovnice

Statická Hamiltonova–Jacobiho rovnice

$$H(x, \boldsymbol{d}S) = E$$

Zobecněné Hamiltonovy–Jacobiho rovnice pro zachovávající veličiny

$$\boldsymbol{d}S \cdot \boldsymbol{k}_{(j)} \cdot \boldsymbol{d}S = K_j \qquad\qquad \boldsymbol{l}_{(j)} \cdot \boldsymbol{d}S = L_j$$

Aditivní separabilní ansatz

$$S = \sum_\mu S_\mu + \sum_j L_j\,\psi_j \qquad\qquad S_\mu = S_\mu(\,x_\mu\,;\;K_j,\;L_j)$$

Separované obyčejné diferenciální rovnice

$$(S'_\mu)^2 = \frac{\tilde{K}_\mu}{X_\mu} - \frac{\tilde{L}_\mu^2}{X_\mu^2} \qquad \Rightarrow \qquad S_\mu = \int^{x_\mu} \frac{\sqrt{X_\mu \tilde{K}_\mu - \tilde{L}_\mu^2}}{X_\mu}\,dx_\mu$$

Separabilita řešení vlnové rovnice

Vlnová rovnice

$$\Box\,\phi = 0 \qquad\qquad \Box = -\boldsymbol{g}^{ab}\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b$$

Operátory odpovídající zachovávajícím se veličinám

$$\mathcal{K}_j = -\boldsymbol{\nabla}_a\,\boldsymbol{k}^{ab}_{(j)}\,\boldsymbol{\nabla}_b \qquad\qquad \mathcal{L}_j = -i\,\boldsymbol{l}^a_{(j)}\boldsymbol{\nabla}_a$$

Separabilita řešení vlnové rovnice

Vlnová rovnice

$$\Box\,\phi = 0 \qquad\qquad \Box = -\boldsymbol{g}^{ab}\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b$$

Operátory odpovídající zachovávajícím se veličinám

$$\mathcal{K}_j = -\boldsymbol{\nabla}_a\,\boldsymbol{k}^{ab}_{(j)}\,\boldsymbol{\nabla}_b \qquad\qquad \mathcal{L}_j = -i\,\boldsymbol{l}^{a}_{(j)}\boldsymbol{\nabla}_a$$

Komutativita operátorů

$$\big[\mathcal{K}_k,\mathcal{K}_l\big] = 0 \qquad \big[\mathcal{K}_k,\mathcal{L}_l\big] = 0 \qquad \big[\mathcal{L}_k,\mathcal{L}_l\big] = 0$$

Společný systém vlastních funkcí

$$\mathcal{K}_j\phi = K_j\phi \qquad\qquad \mathcal{L}_j\phi = L_j\phi$$

Separabilita řešení vlnové rovnice

Operátory odpovídající zachovávajícím se veličinám

$$\mathcal{K}_j = -\boldsymbol{\nabla}_a\, \boldsymbol{k}_{(j)}^{ab}\, \boldsymbol{\nabla}_b \qquad\qquad \mathcal{L}_j = -i\, \boldsymbol{l}_{(j)}^{a} \boldsymbol{\nabla}_a$$

Společný systém vlastních funkcí

$$\mathcal{K}_j \phi = K_j \phi \qquad\qquad \mathcal{L}_j \phi = L_j \phi$$

Multiplikativní separabilní ansatz

$$\phi = \prod_\mu R_\mu \prod_{k=0}^{N-1+\varepsilon} \exp\bigl(i L_k \psi_k\bigr) \qquad\qquad R_\mu = R_\mu(\, x_\mu\,;\; K_j,\, L_j)$$

Separované obyčejné diferenciální rovnice

$$\Bigl(X_\mu R'_\mu\Bigr)' + \left(\frac{\tilde{K}_\mu}{X_\mu} - \frac{\tilde{L}_\mu^2}{X_\mu^2}\right) R'_\mu = 0 \qquad\qquad \begin{aligned} \tilde{K}_\mu &= \sum_j K_j (-x_\mu^2)^{N-1-j} \\ \tilde{L}_\mu &= \sum_j L_j (-x_\mu^2)^{N-1-j} \end{aligned}$$

Shrnutí

- **Explicitní a skryté symetrie** $\Leftrightarrow$ **Killingovy vektory a tenzory**
- **Killingovy tenzory lze budovat z Killingových–Yanových forem**
- **Základní tenzor** $\Rightarrow$ **Killingova 'věž' symetrií**
- **Základní tenzor** $\Rightarrow$ **Kerr–NUT–(A)dS geometrie**
- **Bohatá struktura symetrií** $\Rightarrow$ **Integrabilita a separabilita**

Pokračující výzkum

- **Interpretace Kerr–NUT–(A)dS geometrie**
  - rotační Killingovy vektory a parametry rotace
  - regularita os rotace a NUT parametry
- **Zobecnění připouštějící nabité a urychlené černé díry**
  - geometrie připouštějící pouze konformní Killingovy tenzory
  - zobecnění EM pole na p-formy
  - řešení jiných teorií gravitace (Lovelock či kvadartická gravitace)
- **Speciální limity Kerr–NUT–(A)dS geometrie**
  - degenerované rotace
  - deformované černé díry
  - taubovská limita a 'nutty' prostoročasy
- **Separabilita dalších polí**
  - gravitační perturbace
  - elektromagnetické pole, případně p-formy

Černé díry ve vyšších dimenzích

- P. Krtouš, D. Kubizňák, D. N. Page and V. P. Frolov, *Killing-Yano Tensors, Rank-2 Killing Tensors, and Conserved Quantities in Higher Dimensions*, JHEP **0702** (2007) 004
- P. Krtouš, V. P. Frolov and D. Kubizňák, *Hidden Symmetries of Higher Dimensional Black Holes and Uniqueness of the Kerr-NUT-(A)dS spacetime*, Phys. Rev. D **78** (2008) 064022
- V. P. Frolov, P. Krtouš and D. Kubizňák, *Separability of Hamilton-Jacobi and Klein-Gordon Equations in General Kerr-NUT-AdS Spacetimes*, JHEP **0702** (2007) 005
- D. N. Page, D. Kubizňák, M. Vasudevan and P. Krtouš, *Complete integrability of geodesic motion in general Kerr-NUT-AdS spacetimes*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 061102
- P. Krtouš, D. Kubizňák, D. N. Page and M. Vasudevan, *Constants of geodesic motion in higher-dimensional black-hole spacetimes*, Phys. Rev. D **76** (2007) 084034
- A. Sergyeyev and P. Krtouš, *Complete Set of Commuting Symmetry Operators for Klein-Gordon Equation in Generalized Higher-Dimensional Kerr-NUT-(A)dS Spacetimes*, Phys. Rev. D **77** (2008) 044033
- P. Krtouš, *Electromagnetic field in higher-dimensional black-hole spacetimes*, Phys. Rev. D **76** (2007) 084035
- M. Cariglia, P. Krtouš and D. Kubizňák, *Dirac Equation in Kerr-NUT-(A)dS Spacetimes: Intrinsic Characterization of Separability in All Dimensions*, Phys. Rev. D **84** (2011) 024008
- M. Cariglia, P. Krtouš and D. Kubizňák, *Commuting symmetry operators of the Dirac equation, Killing-Yano and Schouten-Nijenhuis brackets*, Phys. Rev. D **84** (2011) 024004
- V. P. Frolov and P. Krtouš, *Charged particle in higher dimensional weakly charged rotating black hole spacetime*, Phys. Rev. D **83** (2011) 024016
- P. Krtouš, D. Kubizňák, V. P. Frolov and I. Kolář, *Deformed and twisted black holes with NUTs*, Class. Quant. Grav. **33** (2016) 115016
- I. Kolář and P. Krtouš, *Spacetimes with a separable Klein-Gordon equation in higher dimensions*, Phys. Rev. D **93** (2016) 024053
- P. Krtouš, D. Kubizňák and I. Kolář, *Killing-Yano forms and Killing tensors on a warped space*, Phys. Rev. D **93** (2016) 024057
- I. Kolář and P. Krtouš, *NUT-like and near-horizon limits of Kerr-NUT-(A)dS spacetimes*, arXiv:1701.03950

a další . . .

Jiná témata

- J. B. Griffiths, P. Krtouš and J. Podolský, *Interpreting the C-metric*, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 6745
- P. Krtouš, *Accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **72** (2005) 124019
- P. Krtouš and A. Zelnikov, *Minimal surfaces and entanglement entropy in anti-de Sitter space*, JHEP **1410** (2014) 077
- P. Krtouš and A. Zelnikov, *Entanglement entropy of spherical domains in anti-de Sitter space*, Phys. Rev. D **89** (2014) 104058
- P. Krtouš, J. Podolský, A. Zelnikov and H. Kadlecová, *Higher-dimensional Kundt waves and gyratons*, Phys. Rev. D **86** (2012) 044039
- H. Kadlecová, A. Zelnikov, P. Krtouš and J. Podolský, *Gyratons on direct-product spacetimes*, Phys. Rev. D **80** (2009) 024004
- J. Bičák and P. Krtouš, *Accelerated sources in de Sitter space-time and the insufficiency of retarded fields*, Phys. Rev. D **64** (2001) 124020
- J. Bičák and P. Krtouš, *The Fields of uniformly accelerated charges in de Sitter spacetime*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 211101
- J. Bičák and P. Krtouš, *Fields of accelerated sources: Born in de Sitter*, J. Math. Phys. **46** (2005) 102504
- P. Krtouš, *Electromagnetic field near cosmic string*, Phys. Rev. D **74** (2006) 065006
- P. Krtouš and J. Podolský, *Radiation from accelerated black holes in de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68** (2003) 024005
- J. Podolský, M. Ortaggio and P. Krtouš, *Radiation from accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68** (2003) 124004
- P. Krtouš and J. Podolský, *Asymptotic structure of radiation in higher dimensions*, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 1603
- P. Krtouš, J. Podolský and J. Bičák, *Gravitational and electromagnetic fields near a de Sitter - like infinity*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 061101
- L. Havrdova and P. Krtouš, *Melvin universe as a limit of the C-metric*, Gen. Rel. Grav. **39** (2007) 291
- M. Ortaggio, P. Krtouš and J. Podolský, *Ultrarelativistic boost of the black ring*, Phys. Rev. D **71** (2005) 124031
- M. Ortaggio, P. Krtouš and J. Podolský, *Ultrarelativistic boost of spinning black rings*, JHEP **0512** (2005) 001
- J. Dolanský and P. Krtouš, *Billiard in the space with a time machine*, Phys. Rev. D **82** (2010) 124056

a další . . .

Černé díry ve vyšších dimenzích

- P. Krtouš, D. Kubizňák, D. N. Page and V. P. Frolov, *Killing-Yano Tensors, Rank-2 Killing Tensors, and Conserved Quantities in Higher Dimensions*, JHEP **0702** (2007) 004 [83 cit.]
- P. Krtouš, V. P. Frolov and D. Kubizňák, *Hidden Symmetries of Higher Dimensional Black Holes and Uniqueness of the Kerr-NUT-(A)dS spacetime*, Phys. Rev. D **78** (2008) 064022 [72 cit.]
- V. P. Frolov, P. Krtouš and D. Kubizňák, *Separability of Hamilton-Jacobi and Klein-Gordon Equations in General Kerr-NUT-AdS Spacetimes*, JHEP **0702** (2007) 005 [98]
- D. N. Page, D. Kubizňák, M. Vasudevan and P. Krtouš, *Complete integrability of geodesic motion in general Kerr-NUT-AdS spacetimes*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 061102 [94]
- P. Krtouš, D. Kubizňák, D. N. Page and M. Vasudevan, *Constants of geodesic motion in higher-dimensional black-hole spacetimes*, Phys. Rev. D **76** (2007) 084034 [48]
- A. Sergyeyev and P. Krtouš, *Complete Set of Commuting Symmetry Operators for Klein-Gordon Equation in Generalized Higher-Dimensional Kerr-NUT-(A)dS Spacetimes*, Phys. Rev. D **77** (2008) 044033 [35]
- P. Krtouš, *Electromagnetic field in higher-dimensional black-hole spacetimes*, Phys. Rev. D **76** (2007) 084035 [15]
- M. Cariglia, P. Krtouš and D. Kubizňák, *Dirac Equation in Kerr-NUT-(A)dS Spacetimes: Intrinsic Characterization of Separability in All Dimensions*, Phys. Rev. D **84** (2011) 024008 [23]
- M. Cariglia, P. Krtouš and D. Kubizňák, *Commuting symmetry operators of the Dirac equation, Killing-Yano and Schouten-Nijenhuis brackets*, Phys. Rev. D **84** (2011) 024004 [23]
- V. P. Frolov and P. Krtouš, *Charged particle in higher dimensional weakly charged rotating black hole spacetime*, Phys. Rev. D **83** (2011) 024016 [14]
- P. Krtouš, D. Kubizňák, V. P. Frolov and I. Kolář, *Deformed and twisted black holes with NUTs*, Class. Quant. Grav. **33** (2016) 115016 [3]
- I. Kolář and P. Krtouš, *Spacetimes with a separable Klein-Gordon equation in higher dimensions*, Phys. Rev. D **93** (2016) 024053 [3]
- P. Krtouš, D. Kubizňák and I. Kolář, *Killing-Yano forms and Killing tensors on a warped space*, Phys. Rev. D **93** (2016) 024057 [3]
- I. Kolář and P. Krtouš, *NUT-like and near-horizon limits of Kerr-NUT-(A)dS spacetimes*, arXiv:1701.03950 [1]

a další ...

citace podle INSPIRE: *the High Energy Physics information system*, k 1. 4. 2017

Jiná témata

- J. B. Griffiths, P. Krtouš and J. Podolský, *Interpreting the C-metric*, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 6745 [35 cit.]
- P. Krtouš, *Accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **72** (2005) 124019 [21 cit.]
- P. Krtouš and A. Zelnikov, *Minimal surfaces and entanglement entropy in anti-de Sitter space*, JHEP **1410** (2014) 077 [6]
- P. Krtouš and A. Zelnikov, *Entanglement entropy of spherical domains in anti-de Sitter space*, Phys. Rev. D **89** (2014) 104058 [5]
- P. Krtouš, J. Podolský, A. Zelnikov and H. Kadlecová, *Higher-dimensional Kundt waves and gyratons*, Phys. Rev. D **86** (2012) 044039 [9]
- H. Kadlecová, A. Zelnikov, P. Krtouš and J. Podolský, *Gyratons on direct-product spacetimes*, Phys. Rev. D **80** (2009) 024004 [11]
- J. Bičák and P. Krtouš, *Accelerated sources in de Sitter space-time and the insufficiency of retarded fields*, Phys. Rev. D **64** (2001) 124020 [34]
- J. Bičák and P. Krtouš, *The Fields of uniformly accelerated charges in de Sitter spacetime*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 211101 [22]
- J. Bičák and P. Krtouš, *Fields of accelerated sources: Born in de Sitter*, J. Math. Phys. **46** (2005) 102504 [17]
- P. Krtouš, *Electromagnetic field near cosmic string*, Phys.Rev.D **74** (2006) 065006 [2]
- P. Krtouš and J. Podolský, *Radiation from accelerated black holes in de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68** (2003) 024005 [27]
- J. Podolský, M. Ortaggio and P. Krtouš, *Radiation from accelerated black holes in an anti-de Sitter universe*, Phys. Rev. D **68** (2003) 124004 [22]
- P. Krtouš and J. Podolský, *Asymptotic structure of radiation in higher dimensions*, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 1603 [13]
- P. Krtouš, J. Podolský and J. Bičák, *Gravitational and electromagnetic fields near a de Sitter - like infinity*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 061101 [12]
- L. Havrdova and P. Krtouš, *Melvin universe as a limit of the C-metric*, Gen. Rel. Grav. **39** (2007) 291 [3]
- M. Ortaggio, P. Krtouš and J. Podolský, *Ultrarelativistic boost of the black ring*, Phys. Rev. D **71** (2005) 124031 [10]
- M. Ortaggio, P. Krtouš and J. Podolský, *Ultrarelativistic boost of spinning black rings*, JHEP **0512** (2005) 001 [6]
- J. Dolanský and P. Krtouš, *Billiard in the space with a time machine*, Phys. Rev. D **82** (2010) 124056

a další ...