

Sféricky symetrický gravitační kolaps skalárního pole

Skalární pole představuje nejjednodušší model hmoty, která má tendenci se rozptýlit a přirozeně tím vzdorovat gravitačnímu kolapsu. To představuje kontrast s historickým modelem Oppenheimera a Snydera a dalšími modely kolapsu hmotných slupek atp. Klíčová ve pohybová rovnice pole

$$\square\Phi := \nabla^\mu \partial_\mu \Phi = 0. \quad (1)$$

Pro takové pole je

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\lambda \Phi \partial_\lambda \Phi. \quad (2)$$

Pochopitelně, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ dá $\partial^\mu \Phi \square\Phi = 0$, na to se hodí ta polovina v definici $T^{\mu\nu}$.

Příspěvek pole do akce je

$$S_\Phi = \int \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \sqrt{-g} d^4x, \quad (3)$$

přičemž variací (a potlačení povrchových členů) dostaneme

$$\delta S_\Phi = \dots = \int \delta\Phi \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) d^4x, \quad (4)$$

což připomíná důležitý vzorec

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi). \quad (5)$$

Skalární pole v plochém prostoročase

Abychom mohli posoudit chování skalárního pole při gravitačním kolapsu, musíme si nejprve připomenout sféricky symetrické řešení v plochém prostoročase. To lze zapsat ($r = |\vec{r}|$)

$$\Phi(t, r) = \frac{1}{r} \Psi(t, r) = \frac{1}{r} (f(t-r) - f(t+r)), \quad (6)$$

tedy jako součet odcházející a vcházející vlny, jejíž amplituda klesá se vzdáleností. Již v tomto vzorečku se aplikuje okrajová podmínka v počátku, $|\Phi(t, r=0)| < \infty$. Jedině tak může mít pole konečnou (zachovávající se) energii

$$W = \int T_{00} d^3x = \int ((\partial_t \Phi)^2 + |\nabla \Phi|^2) d^3x. \quad (7)$$

Povšimněte si, že hodnota Φ v počátku je dána derivací f které se vyskytují i ve výrazu pro energii. Podobně lze pro konečné pole v počátku nalézt argumenty za použití Greenovy funkce vlnové rovnice.

Počáteční úloha pro Φ resp. Ψ vede na derivaci funkce f ,

$$\Psi_r(t=0, r) = -f'(-r) - f'(r), \quad (8)$$

$$\Psi_t(t=0, r) = f'(-r) - f'(r), \quad (9)$$

tedy

$$2f'(r) = -\Psi_r(t=0, r) - \Psi_t(t=0, r), \quad (10)$$

$$2f'(-r) = \Psi_t(t=0, r) - \Psi_r(t=0, r). \quad (11)$$

Pokud je $\Psi_t(t=0, r) = 0$, lze přímo určit

$$f(r) = -f(-r) = -\frac{1}{2} \Psi(t=0, r). \quad (12)$$

Nulové souřadnice

Často se hodí zavést retardovaný a advancovaný čas

$$u = t - r, \quad (13)$$

$$v = t + r. \quad (14)$$

U charakteristické počáteční úlohy se zadá Φ jako funkce radiální souřadnice na světelném kuželi $u = u_0$. Pro popsání vývoje pole je výhodné použít dvojici souřadnic u, r zastupující t, r

$$\Phi(u, r) = \frac{1}{r} \Psi(u, r) = \frac{1}{r} (f(u) - f(u + 2r)). \quad (15)$$

Nyní je počáteční úloha ještě jednodušší

$$\Psi(u = u_0, r) = f(u_0) - f(u_0 + 2r), \quad (16)$$

až na faktor 2 a konstantu $f(u_0)$ je f přímo určeno Ψ . Změna souřadnic $z(t, r) \rightarrow (u, r)$ znamená také změnu nekonečen, nyní $r \rightarrow \infty$ je při konstantním u tzv. světelné nekonečno \mathcal{J}^+ . M.j. proto, že naše pozorování probíhají daleko od „centra“ se zkoumají rozvoje pro velká r . Vidíme, že

$$\Psi(u, r = \infty) = f(u) - f(\infty), \quad (17)$$

tedy f představuje kromě počátečních dat také data na \mathcal{J}^+ (opět až na konstantu), pozorovatel tam zahlédne celý vývoj pole, jak se u mění od $-\infty$ do $+\infty$. Penrose a další zkoumali rozvoj poblíž \mathcal{J}^+ . Pokud položíme $f(s) = h(1/s)$ máme

$$f(u + 2r) = h\left(\frac{1}{u + 2r}\right) = h\left(\frac{1}{2r} \frac{1}{1 + \frac{u}{2r}}\right) = h\left(\frac{1}{2r} \left[1 - \frac{u}{2r} + \left(\frac{u}{2r}\right)^2 + \dots\right]\right) \quad (18)$$

a první dva členy tohoto rozvoje pro $r \rightarrow \infty$ tedy nezávisí na u . Proto

$$\Psi(u, r) = \Psi(u, r = \infty) - \frac{h'(0)}{2r} + \frac{2uh'(0) - h''(0)}{8r^2} + \frac{-h^{(3)}(0) + 6uh''(0) - 6u^2h'(0)}{48r^3} + \dots \quad (19)$$

Protože funkce f a tedy i h je dána počátečními daty, vidíme, že ta určují i hodnotu konstanty $-h'(0)/2$, tedy poblíž \mathcal{J}^+ je u skalárního pole člen stojící u $1/r$ konstantní. Jde o příklad Neumanovy-Penroseovy konstanty jaké se obecně vyskytují při studiu chování nehmotných polí u světelného nekonečna.

Připomeňme ještě vztahy používané při kompaktifikaci Minkowskiho prostoročasu

$$U = T - R = \arctan u = \arctan(t - r), \quad (20)$$

$$V = T + R = \arctan v = \arctan(t + r), \quad (21)$$

U, V jsou nulové/světelné souřadnice a R, T pak vodorovná a svislá souřadnice na Obr. 2.

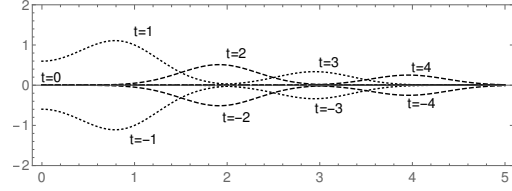
Odlišný způsob, jímž se čáry \mathcal{J}^+ a $r = \text{konst.}$ přibližují budoucímu nekonečnu také vysvětluje, proč, položíme-li rozvoj

$$f(s) = f(\infty) + \frac{1}{s}f_1 + \frac{1}{s^2}f_2 + \dots \quad (22)$$

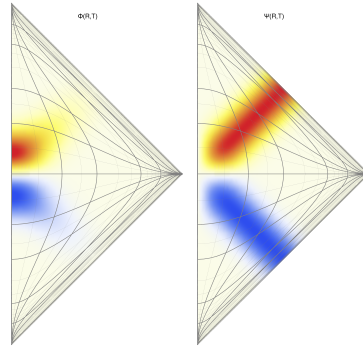
získáme odlišný „tail“ v limitách pozorovatele na konstantním r a na \mathcal{J}^+

$$\Phi(t, r = \text{konst}) = -\frac{2f_1r}{t^2} + \dots \quad (23)$$

$$\Phi(u, r = \infty) = -\frac{f_1}{u} + \dots \quad (24)$$



Obrázek 1: Příklad vývoje radiálního průběhu amplitudy skalárního pole v kompakťikovaném plochem prostoročase zachycený ve vybraných časech $t = -4, -3, \dots, +4$. V čase $t = 0$ je $\Phi = 0$, veškerá energie je tento okamžik v hybnosti pole.



Obrázek 2: Totéž skalární pole zakreslené v kompakťikovaném plochem prostoročase.

Diamantové schéma

Až v křivém prostoru odvodíme výraz pro $\square\Phi$ a uvidíme, že v plochém prostoru má pak tvar

$$\square\Phi = \frac{1}{r} (\Psi_{rr} - 2\Psi_{ru}). \quad (25)$$

Tento vztah můžeme použít k vysvětlení NSW schématu v plochém prostoru. Nejprve si všimneme, že změna souřadnic $(u, r) \rightarrow (u, v)$, kde $v = u + 2r$ znamená

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial u \\ \partial/\partial r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial u & \partial v/\partial u \\ \partial u/\partial r & \partial v/\partial r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial u \\ \partial/\partial v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial u \\ \partial/\partial v \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Proto

$$\Psi_{rr} - 2\Psi_{ru} = (\Psi_r - 2\Psi_u)_r = -2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial u} \right)_{v=\text{const}} \right]_{u=\text{const}}.$$

Integrací výrazu $r\square\Phi=0$ přes rovnoběžník tvořený dvěma dvojicemi čar $v = v_1, v = v_2$ a $u = u_1, u = u_2$ (tzv. diamond scheme) dostáváme

$$\Psi_N - \Psi_W - \Psi_E + \Psi_S = 0. \quad (27)$$

Pozn. Ověřte, že tentýž vztah vyplývá z (6).

Rovnice gravitačního kolapsu skalárního pole – souřadnice t, r

Sférická symetrie umožňuje zapsat metriku

$$ds^2 = -\alpha(t, r)^2 dt^2 + a(t, r)^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (28)$$

Tento zápis neumožní podívat se, jak se pole chová pod horizontem, ale použil jej Choptuik při svém výzkumu. Pokud z $r = r_0$ vyletí foton radiálním směrem, za chvíli je na poloměru $r_1 = r_0 \pm dt \alpha/a$. Protože α ani a nemohou být záporné, radiálně vylétající fotony vytvářejí sféru s rostoucí plochou. Takové fotonové sféry se nemohou nacházet pod zdánlivým horizontem. Uvedená podoba ds^2 tedy fixuje souřadnice v podobě, která vylučuje přístup pod horizont. Výhodou je ale velmi podstatné zjednodušení problému.

Einsteinovy rovnice dají s použitím dříve zavedeného $T_{\mu\nu}$

$$r \frac{a^2}{\alpha^2} (G_{tt} - 8\pi T_{tt}) = \frac{a_r}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} - 2\pi r (\Phi_r^2 - \frac{a^2}{\alpha^2} \Phi_t^2) = 0 \quad (29)$$

$$r (G_{tt} - 8\pi T_{tt}) - r \frac{a^2}{\alpha^2} (G_{rr} - 8\pi T_{rr}) = \frac{a_r}{a} + \frac{a^2 - 1}{r} - \frac{\alpha_r}{\alpha} = 0 \quad (30)$$

další složky Einsteinových rovnic nejsou potřeba. Musíme je ale doplnit evoluční rovnicí pro skal.pole, která měla v Choptuikově článku Hamiltonovský tvar pro veličiny $\tilde{\phi} = \partial_r \Phi$ a $\tilde{\pi} = a \partial_t \Phi / \alpha$

$$\partial_t \tilde{\phi} = \partial_r \left(\frac{\alpha}{a} \tilde{\pi} \right), \quad (31)$$

$$\partial_t \tilde{\pi} = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \frac{\alpha}{a} \tilde{\phi} \right). \quad (32)$$

Cvičení: Odvoďte tyto rovnice.

Je nezbytné všechny tyto rovnice doplnit o okrajové příp. počáteční podmínky. Zatímco hodnotu α je možné zvolit libovolně, regularita v počátku vyžaduje, aby $a(t, r=0) = 1$, je to vidět i v rovnicích (29)-(30). Dále je potřeba aby v okolí počátku $\tilde{\phi}(t, r) \sim r$.

Ve sférické symetrii je poměrně snadné nalézt vhodný výraz pro hmotu: Misner a Sharp r. 1964 použili dobře definovanou na souřadnicích nezávislou veličinu – obvodový poloměr r_C . Pro nás je totožný se souřadnicí $r = r_C$. Ve Schwarzschildově prostoročase máme $|\nabla r_C|^2 = (1 - 2M/r_C)^{-1}$. Tato geometrie prostoročasu popisuje i pole vně jakékoli sféricky rozložené hmoty a je tedy přirozené hmotnost definovanou jako

$$M_{MS} = \frac{r_C}{2} (1 - |\nabla r_C|^2) \quad (33)$$

rozšířit i dovnitř sféricky symetrické hvězdy či balíku pole. Regularita centra dá, že $M_{MS}(r=0) = 0$ a pak se tato veličina mění, až nabude konstantní hodnoty vně objektu. Pro naše skal. pole máme

$$\frac{\partial}{\partial r} M_{MS} = 4\pi r^2 \left(\frac{\phi_\tau^2}{2a^2} + \frac{\phi_t^2}{2\alpha^2} \right) \quad (34)$$

což lze velmi přibližně interpretovat jako plochu sféry a hustotu energie, určitě je ale pravá strana nezáporná.

Kupodivu, tyto rovnice není úplně snadné řešit a konkrétně Choptuik se tomu věnoval mezi lety 1982 a 1993. Klíčová byla otázka, jak závisí hmotnost černé díry vzniklé kolapsem pole na počáteční konfiguraci pole, kterou popíšeme nějakým parametrem p . Numerické řešení je velmi pracné, zejména jakmile se počáteční data blíží prahu formování černé díry. To úplně nepřekvapí: simulace musí pokrýt dostatečně velkou oblast danou škálou počátečních dat, aby se tam „vešel“ potřebný vývoj pole, na druhé straně potřebujeme rozlišit centrální oblast na rozměrech $\ll M_{BH}$. Podobně, jako světlo oběhne malou černou díru za kratší čas než tu velkou, vyžaduje i numerické řešení dávající vzniknout malým černým díram použít menší časový krok, než u té větší. Výpočet tedy musí počít malý dělení v prostorovém i časovém směru, což zejména při výkonu počítačů na počátku devadesátých let byl problém. Ve skutečnosti, opustíme-li sférickou symetrii je to problém dodnes.

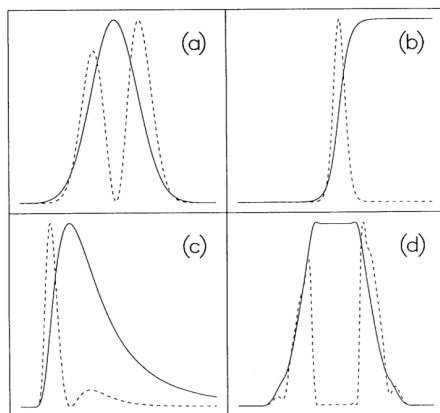


FIG. 1. Typical initial profiles of the scalar field ϕ (solid lines) and the radial mass-energy density dm/dr (dotted lines) for the four families defined in Table I.

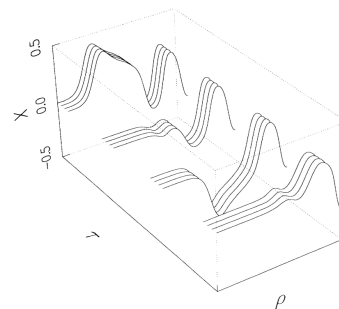


FIG. 3. Illustration of the conjectured universality of critical evolution in the model problem. Each group of four lines consists of one profile, at a particular instant, τ , from near-critical evolution of each of the families listed in Table I [families (a)–(d), front to back]. For each family, I chose a single overall scaling constant, k , to maximize agreement among the first (foreground) group of curves. Agreement of the profiles at later times (towards the back of the plot) demonstrates universality of the evolution, regardless of initial pulse shape. Since these plots show less than one full cycle of evolution, echoing is not apparent here.

Obrázek 3: Původní obrázky z [Choptuik1993] ilustrující univerzalitu kritického chování gravitačního kolapsu skalárního pole.

Na konci byl následující objev:

- Pokud pro jednu hodnotu parametru p vznikne černá díra a pro jinou se pole rozptýlí, je mezi nimi ostrá hranice p^*
- Hmotnost vniklé černé díry (přesněji: vznikající, ještě uvidíme, kde je problém) je

$$M_{BH} \approx (p - p^*)^\gamma \quad (35)$$

- Může tedy vzniknout libovolně malá černá díra (viz též Obr. 12).
- Ať parametr p popisuje počáteční šířku vlnového balíku, jeho amplitudu, vzdálenost od počátku nebo něco jiného, je ve vztahu pro hmotu černé díry univerzální kritický exponent $\gamma \approx 0.373$.
- Veličiny v centrální oblasti kolapsu prudce oscilují.
- Metrika a další veličiny jsou diskrétně sobě podobné, bezrozměrné veličiny jsou periodické funkce $f(\tau) = f(\tau + \Delta)$ logaritmického času $\tau = \ln(t - t^*)$
- Nejenže na počáteční konfiguraci pole nezávisí hodnota γ , nezávisí na ní ani samotný průběh metriky a skalárního pole v centrální oblasti kolapsu (přesnější formulace později).

- Pro vysvětlení chování se použijí argumenty z teorie dynamických systémů.

Později se ukázalo, že hodnoty γ a Δ se změní, když vezmeme jinou teorii, např. Yangovo-Millsovo pole místo pole skalárního.

Pro podrobné seznámení zvolíme za chvíli lepší souřadnice cestu a zde jen cituji klíčové vlastnosti řešení v souřadnicích t, r .

Pro popsání chování v okolí události, kde vznikne/nevznikne ona nekonečně malá černá díra se používají logaritmické prostoročasové souřadnice, kromě výše zavedeného $\tau = \ln(t^* - t) + \text{const.}$ ještě $\rho = \ln r + \text{const.}$ Pozorovaná periodičnost v τ s periodou Δ tak znamená diskrétní soběpodobnost v t, r , tu lze s pomocí 'push-forward' ϕ^* metriky pro celý počet period n zapsat ve tvaru

$$(\phi^*)^n [g_{\mu\nu}] = e^{2\Delta n} g_{\mu\nu}. \quad (36)$$

Svůj objev [Choptuik1993] univerzality ilustruje mj. podobou tvaru pole blízko τ^* pro velmi odlišné počáteční konfigurace pole, viz Obr. 3.

Rovnice gravitačního kolapsu skalárního pole – souřadnice u, r

Zde vycházíme z článku [PuerrerEtAl2005]. Tam najdete podrobnou diskuzi chování kritického kolapsu skalárního pole. Zde zopakujeme klíčové rovnice, nazančíme některá odvození a diskutujeme několik obrázků znázorňujících probíhající děje.

Souřadnice u, r, θ, ϕ jsou nazývány charakteristické nebo Bondiho typu. (Termín Bondiho souřadnice je rezervován pro situaci, kdy limita $\beta \rightarrow 0$ v $r \rightarrow \infty$.)

$$ds^2 = -e^{2\beta} du \left(\frac{V}{r} du + 2dr \right) + r^2 d\Omega^2$$

$$g^{uu} = 0, \quad g^{ru} = -e^{-2\beta}, \quad g^{rr} = e^{-2\beta} \frac{V}{r}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad \dots$$

Retardovaný čas jako souřadnice umožní sledovat vývoj pole až do světelného nekonečna $u = \text{konst.}, r \rightarrow \infty$. Radiální světočára $u = \text{const.}$ popisuje odlétající foton, správná parametrizace $x^\mu(\lambda)$ geodetiky se musí hledat tak, aby $\dot{x}^\mu \nabla_\mu \dot{x}^\nu = 0$ (viz příloha [PolniRovnice]), a vyjde, že

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = e^{-2\beta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu.$$

Rychlost změny plochy $A = 4\pi r^2$ sféry tvořené radiálně odlétajícími fotony je

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{d\lambda} = \frac{2r}{r^2} \frac{dx^r}{d\lambda} = \frac{2r}{r^2} e^{-2\beta}.$$

To, že plocha pro konečné β vždy roste, znamená, že souřadnicemi nelze pokrýt vitřek černé díry, kde i odlétající fotony nenávratně padají vstříc singularitě. Za použití kompaktifikovaných diagramů je na Obr. 4 znázorněno, jakou oblast bude naše simulace pokrývat.

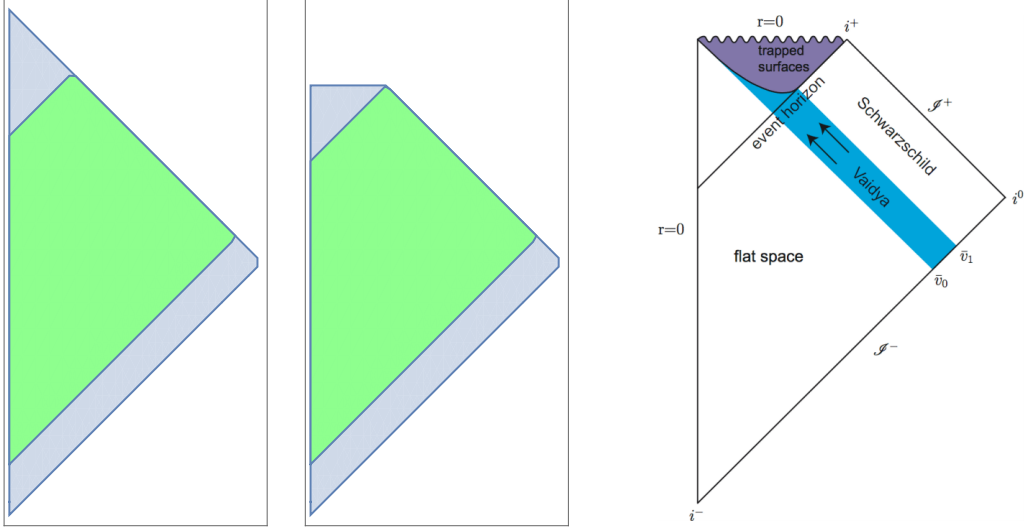
Odvození polních rovnic

$$\beta_{,r} = 2\pi r (\phi_{,r})^2, \quad V_{,r} = e^{2\beta} \quad (37)$$

nejdete v příloze [PolniRovnice]. Skutečnost, že rovnice neobsahují derivaci podle u znamená, že tyto rovnice se řeší na každé nadploše $u = \text{const.}$ Protože funkce bude reprezentována v mřížových bodech bude metoda nahrazovat derivace konečnými diferencemi, umožní hodnoty β, V nalevo spočítat jejich novou hodnotu napravo. Používá se okrajová podmínka v centru

$$\beta(r=0) = 0, \quad V(r=0) = 0.$$

Skalární pole splňuje opět vlnovou rovnici (5), počáteční data jsou ale na nulové počáteční nadploše $u = u_0$ zadána právě průběhem $\phi(u = u_0, r)$. Jak jsme viděli v Minkowskioho případě udává tato funkce amplitudu vcházející části vlnového balíku (ta vycházející je tam dána konstantou). V křivém prostoročase sice dochází



Obrázek 4: Vlevo: kompaktifikovaný diagram pro subkritické $p < p^*$. Zelená oblast je pokryta simulací, začíná s $u = u_0$ a končí s $u = u_{\text{fin}}$. Důvodem pro ukončení simulace je, že pole se rozplynulo. Uprostřed: Schématický kompaktifikovaný prostoročas, ve kterém se při kolapsu sféricky symetrického skalárního pole vytvoří černá díra. Zelená oblast je pokryta simulací, opět začíná na konstantním $u = u_0$. Důvodem pro ukončení simulace je, že finální $u = u_{\text{fin}}$ se blíží horizontu událostí, na němž žádný foton nedoletí do nekonečna. Použité souřadnice neumožňují pokrýt „vnitřek“ černé díry a horizont událostí je limita $u \rightarrow u_H$ dostupná při simulaci. Vpravo: Obrázek z disertace [Puerrer2008] znázorňující prostoročas kolabující vrstvy nulového prachu. (Vaidya spacetime) a (apparent and event) horizonty v něm.

k rozptylu pole, ale i zde polní rovnice pro ϕ neobsahují druhou derivaci pole ve tvaru $\phi_{,uu}$ (neboť $g^{uu} = 0$) a tak i zde je polní rovnice [PolníRovnice] prvního řádu v u

$$r^2 \square \phi = e^{-2\beta} (-2r (r\Phi_{,ur} + \Phi_u) + V (r\Phi_{,rr} + \Phi_r) + rV_r \Phi_r) = 0. \quad (38)$$

Důležité je, že metoda k použítá k řešení této polní nevyhází z nahrazení derivací konečnými diferencemi, ale používá ono Diamantové schéma. V literatuře se cituje argument s možností využít konformní transformace k ploché metrice v $u - r$ souřadnicích. Alternativně můžeme do (38) přímo dosadit

$$\Phi(u, r) = \frac{1}{r} \Psi(u, v(u, r)),$$

kde souřadnice $v(u, r)$ je přiřazena padajícím fotonům, tedy

$$dv = s(r, u) \left(2dr + \frac{V}{r} du \right). \quad (39)$$

Zavádíme integrační faktor $s(u, v)$, takže $v_{,r} = 2s$, $v_{,u} = sV/r$ a zejména $v_{,ru} = 2s_{,u} = (sV/r)_{,r} = v_{,ur}$. Spočteme pak příslušné parciální derivace, např.

$$\Phi_{,r} = \frac{\Psi_{,v}}{r} v_{,r} - \frac{\Psi}{r^2}$$

a po jejich dosazení do (38) vyjde

$$r \square \phi = -e^{-2\beta} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{V}{r} \right)_{,r} \Psi + 4s \Psi_{,uv} \right) = 0. \quad (40)$$

Z jakobiánu transformace dosazením (39) vyjde při integraci $dr du = \partial(u, r) / \partial(u, v) du dv = (2s)^{-1} du dv$ a tedy

$$\Psi_N - \Psi_W - \Psi_E + \Psi_S = -\frac{1}{2} \int_D \frac{1}{r} \left(\frac{V}{r} \right)_{,r} \Psi dr du, \quad (41)$$

kde D je „diamant“ tvořený stranami $u = u_1, u = u_2, v = v_1$ a $v = v_2$. Proto je důležité během simulace sledovat i polohu fotonů padajících směrem do centra $dv = 0$, t.j.

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{2} \frac{V}{r}. \quad (42)$$

Rovnice potřebné pro numerické řešení problému

Do třech hodin přednášky se nám nevešla vlastní numerická implementace rovnic. To, že data jsou zadána na světelném kuželu znamená i ne zcela obvyklé numerické postupy. NSWE schéma ale vede na stabilní evoluční rovnice bez jakýchkoli dalších triků a celý program produkující výsledky simulace se vejde do 200 řádků (C++).

- Důležitým krokem nalezení řešení v celém intervalu $r \in (0, \infty)$ je kompaktifikace radiální souřadnice, např. předpisem $r = x/(1-x)$. Ta umožní pohodlně pokrýt konečný interval $x \in (0, 1)$ sadou bodů, v nichž jsou svými funkčními hodnotami reprezentovány metrika a skalární pole. Viz vztahy (2.16), (2.17), (2.18) v [PuerrerEtAl2005].
- Použití kvazilokální energie ve sférické symetrii (Misner-Sharp mass)

$$m_{MS} = \frac{r}{2} (1 - |\nabla r|^2) = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{V}{r} e^{-2\beta}\right) \quad (43)$$

$$\frac{d}{dr} m_{MS} = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{2} \frac{V}{r} e^{-2\beta} (\Phi_r)^2\right) \quad (44)$$

jako metrické funkce místo V , která u nekonečna diverguje.

- Rovnice (37),(41) a (42) jsou přepsány do kompaktifikované souřadnice x .
- Jsou zvolena vhodná počáteční data $\Phi(u=0, x)$. Jejich amplituda (např.) představuje parametr p . V souladu s [PuerrerEtAl2005] volíme počáteční tvar pole na nadploše $u=0$

$$\Phi(u=0, r) = pr^2 e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}}, \quad (45)$$

kde pro hodnoty $r_0 = 0.7$ a $\sigma = 0.3$ je kritická hodnota parametru $p^* \approx 0.1449$.

- Data (tedy průběhy funkcí $\Psi(x), \beta(x)$ a $m(x)$) jsou v práci [PuerrerEtAl2005] reprezentovány v několika tisíci bodech rozložených na počátku simulace rovnoměrně podél intervalu $x \in (0, 1)$. Důležitým trikem je, že tyto body se nechávají padat směrem k centru po světočárách vcházejících fotonů. To jednak umožní pohodlnou implementaci NSWE schématu (41). Zdálo by se, že nevýhodou je, že takové body je potřeba zahodit, když dosáhnou počátku. Ukázalo se ale, že tato volba řeší také klíčový problém, kterým je dostatečné pokrytí místa blízkého případnému formování titěrné černé díry, protože body/fotony se zde nakupí a umožní bez složitého programování zahustit síť bodů.
- Dále řešení probíhá jako série kroků. Postupuje se od centra do nekonečna. Předpokládají se známá data v retardovaném čase u_j . V centru $x=0$ se aplikují hraniční podmínky. Dále se postupně
 - spočte poloha kam se za krok $u_{j+1} = u_j + \Delta u$ posune (spadne) do centra letící foton v čase u_j se nacházející na souřadnici x_i ,
 - Hodnota kroku Δu se volí $\Delta u = K \min(r/V) \Delta r = K \min[(1 - 2m/r)^{-1} e^{-2\beta} \Delta r]$. Hodnota $K \sim 1$ zajišťuje, že během jednoho kroku foton padající podle (42) nespadne příliš. V situaci, kdy se blíží simulace horizontu tato volba zajistí, že se časový krok simulace „přizpůsobí“ tomu plynoucímu daleko od černé díry, zatímco poblíž ní se výrazně zpomalí.
 - Hodnota integrálu v (41) se spočte jako součin plochy lichoběžníku SEWN a hodnoty integrandu v jeho středu. Tu lze odhadnout průměrem ze známých hodnot WE.
 - Nová hodnota pole umožní určit z rovnic (37) hodnoty β a m v uzlu N.
 - Takto lze snadno zkonstruovat Eulerovo schéma, jeho opakováním pak (explicitní) Midpoint. Metoda vyššího řádu by vyžadovala lepší odhad integrálu.

Einsteinovy rovnice u světelného nekonečna

Pro pochopení výsledků je důležité, že v daných souřadnicích je možné vyřešit Einsteinovy rovnice prostřednictvím rozvoje v $r \rightarrow \infty$. Dosazením tvaru pole poblíž \mathcal{J}^+

$$\phi(u, r) = \frac{c(u)}{r} + \frac{c_{NP}}{r^2} + \dots$$

(ve výpočtech nepotřebujeme vědět, že c_{NP} nezávisí na čase) vyjde

$$\beta(u, r) = H(u) - \pi \frac{(c(u))^2}{r^2} + \dots$$

$$V(u, r) = e^{2H(u)} \left(r - 2M(u) + 2\pi \frac{(c(u))^2}{r} + \dots \right).$$

Zde M dostaneme jako integrační konstantu a písmenem M ji označíme proto, že $M(u) = m_{MS}(u, \rightarrow \infty)$. Spočtením plynutí času $-ds^2 = (du_B)^2$ pozorovatelů u \mathcal{J}^+ vidíme, že jejich čas u_B plyne podle

$$\frac{du_B}{du} = e^{2H(u)}.$$

Limita $e^{2\beta}$ u \mathcal{J}^+ tak dává „redshift“ mezi centrálním a vzdáleným pozorovatelem.

Zatímco (44) udává jak se M-S hmotnost mění podél cesty do světelného nekonečna, ukázal Bondi (pro mnohem složitější gravitační vlny), jak se mění „hmotnost centra“ jak ji vidí vzdálený pozorovatel, když centrum opouští vlny. Klíčový vztah je

$$\frac{dM(u)}{du_B} = -16\pi \left(\frac{dc}{du_B} \right)^2. \quad (46)$$

Tento vztah, v němž vystupuje „news function“ $N(u) := dc/du_B$, lze získat dosazením asymptotického tvaru všech veličin do $G_{uu} = 8\pi T_{uu}$ složky Einsteinových rovnic:

$$\frac{e^{2\beta}V}{r^3} - \frac{VV_r}{r^3} + \frac{V_u}{r^2} + \frac{2V^2\beta_r}{r^3} - \frac{2V\beta_u}{r^2} = \frac{4\pi V^2\Phi_r^2}{r^2} - \frac{8\pi V\Phi_r\Phi_u}{r} + 8\pi\Phi_u^2$$

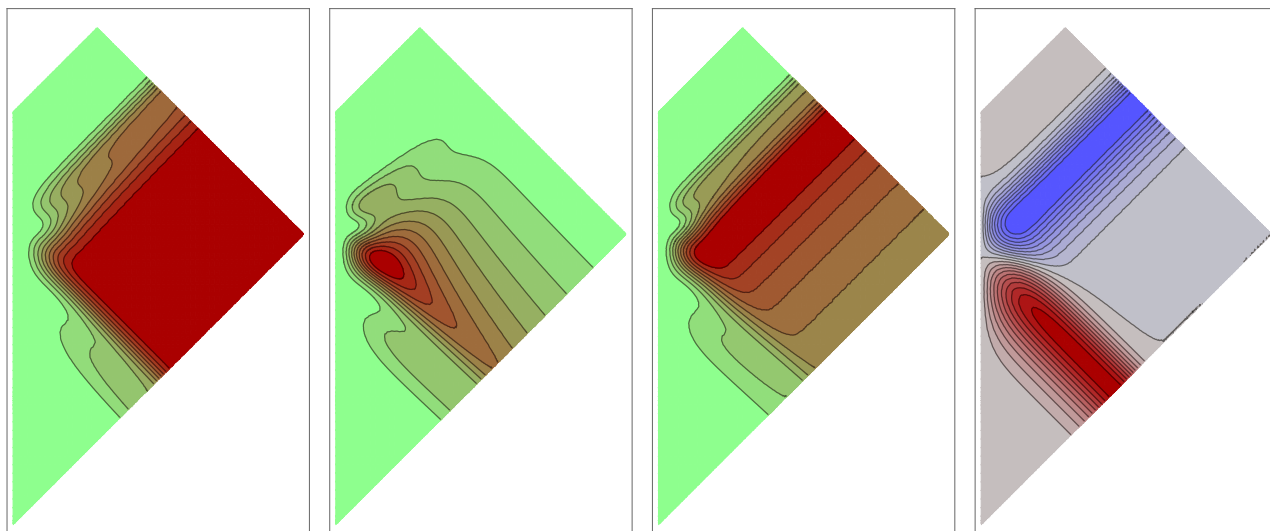
Při udržení jednotlivých sčítanců pohromadě vyjde

$$\left[\frac{e^{4H}}{r^2} + \dots \right] + \left[-\frac{e^{4H}}{r^2} + \dots \right] + \left[\frac{2e^{2H}H'}{r} - \frac{e^{2H}(2MH' + M')}{2r^2} + \dots \right] + [\dots] + \left[-\frac{2e^{2H}H'}{r} + \frac{e^{2H}MH'}{r^2} + \dots \right] =$$

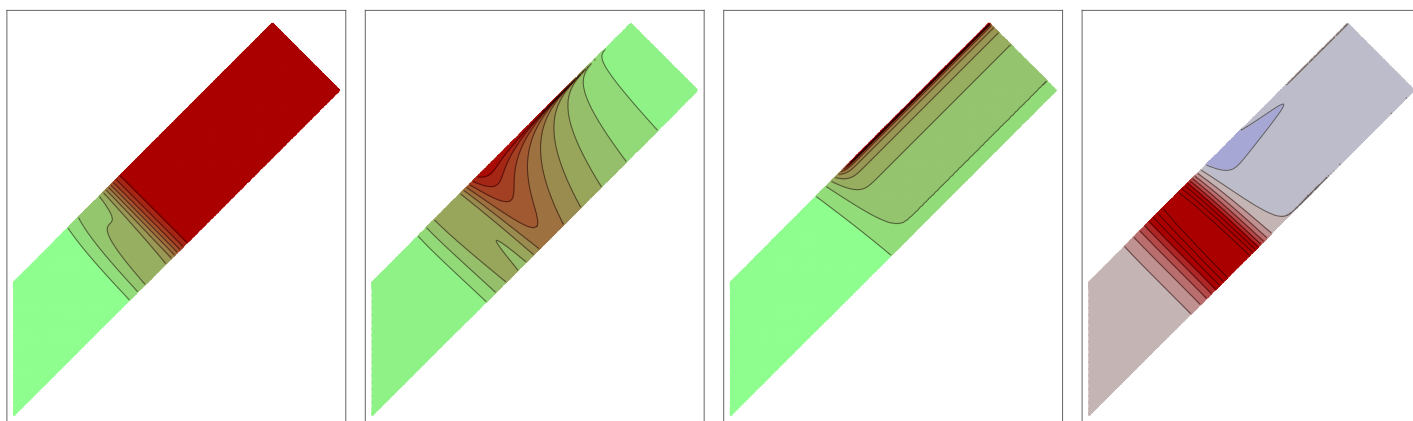
$$[\dots] + [\dots] + \left[\frac{8\pi c'^2}{r^2} + \dots \right],$$

kde zanedbání vyznačujeme $\dots = o(1/r^2)$. Odsud již snadno dostaneme (46).

Výsledky simulací dále od kritického p^*



Obrázek 5: Výsledky pro subkritické $p < p^*$. Vlevo: Průběh funkce $m(u, x)$. Méně vlevo: Průběh podílu $2m/r$. Méně vpravo: Průběh funkce $\beta(u, x)$. Vpravo: Průběh funkce $\Psi(u, x)$.



Obrázek 6: Výsledky pro superkritické $p > p^*$. Vlevo: Průběh funkce $m(u, x)$. Méně vlevo: Průběh podílu $2m/r$. Méně vpravo: Průběh funkce $\beta(u, x)$. Vpravo: Průběh funkce $\Psi(u, x)$.

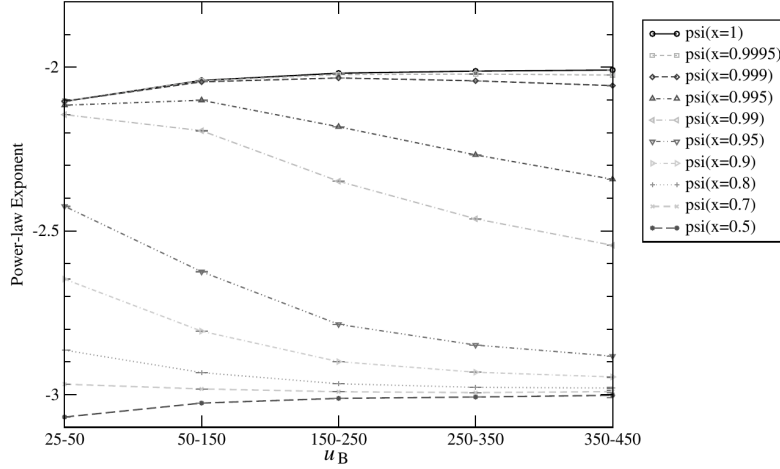
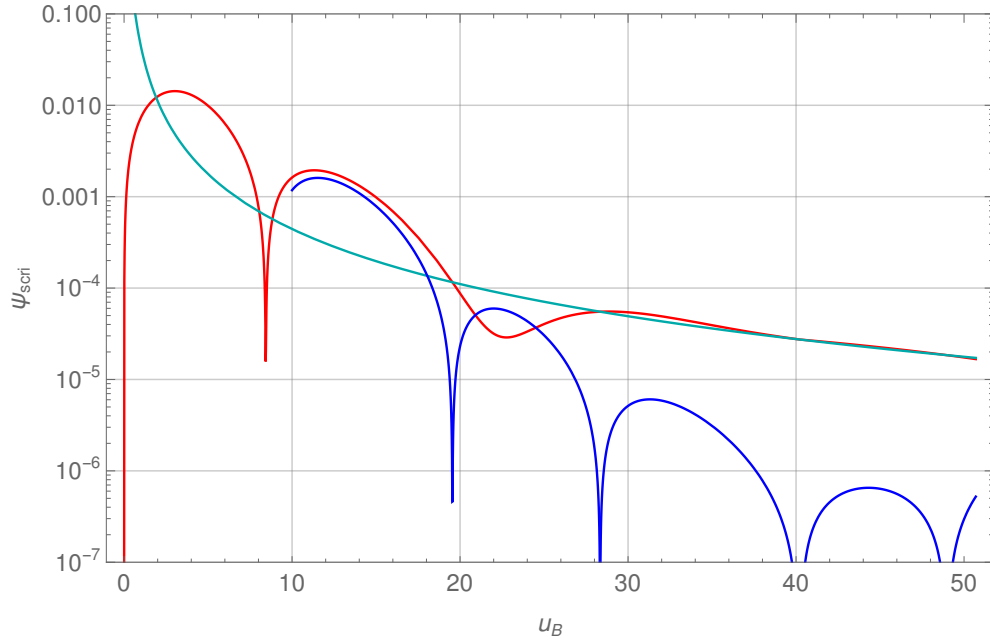


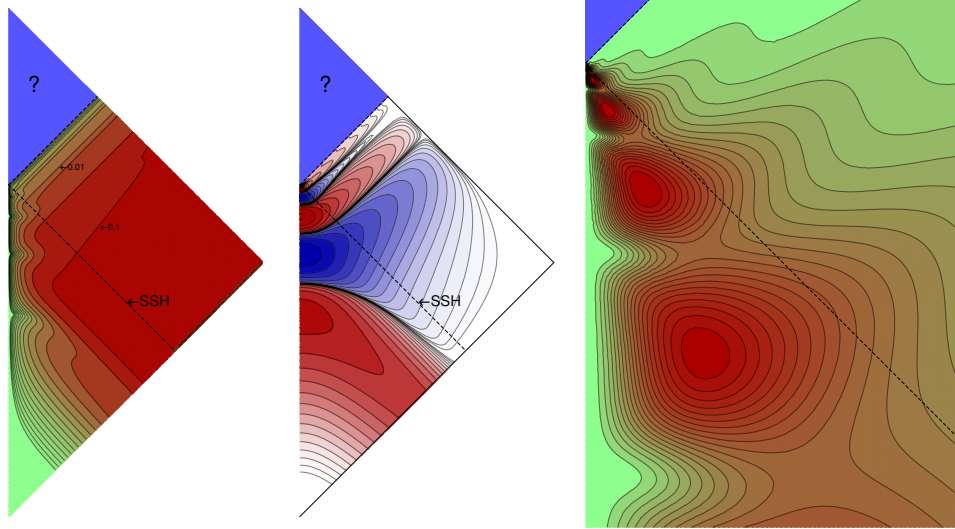
FIG. 13. This figure shows power-law exponents for a subcritical evolution and illustrates the domains of validity of the predictions of perturbation theory for the two zones: -2 near I^+ and -3 near i^+ .

Obrázek 7: Průběh $\phi(u_B)$ v blízkosti \mathcal{J}^+ podél světočar s konstantním poloměrem pro podkritické $p < p^*$ převzatý z [PuerrerEtAl2005]. Zvolená „gaussovská“ počáteční data (45) jsou v nekonečnu k nule rychleji než libovolná mocnina a v plochem prostoru by vedla na exponenciální ubývání funkce $f(u)$ ve vztahu (17) a tak by pole v budoucím nekonečnu i^+ bylo identicky nulové. Na obrázku se ukazuje, že gravitační interakce způsobí dozívání (tail), které stejně jako v Minkowskioho prostoročase závisí na tom, po jakých bodech se blížíme k budoucímu nekonečnu.



Obrázek 8: Průběh $\psi(u_B)$ na \mathcal{J}^+ pro superkritické $p > p^*$ (červená křivka). Tmavě modrá křivka ukazuje kvazिनormalní oscilace, jež jsou nalezeny odečtením „tail“ členu k/u_B^2 od aktuálního pole ψ . (Obrázek slouží jako ilustrace, použité souřadnice a tedy i numerická metoda opravdu nejsou vhodné pro výpočet QNM.)

Struktura kritického řešení



Obrázek 9: Kompaktifikovaný diagram kritického prostoročasu. V místě kde se objeví nekonečně velká křivost vnikne nahá singularita (NS). Její kauzální budoucnost je principiálně nejasná, řešení není jednoznačné. Minulý světelný kužel NS tvoří horizont sobě-podobnosti (SSH), laděním $p = p^*$ se totiž dosáhne toho, že řešení uvnitř něj se přibližuje univerzálnímu sobě-podobnému řešení. Vlevo: Průběh funkce $m(u, x)$. Uprostřed: Průběh funkce $\phi(u, x)$. Vpravo: Detail průběh podílu $2m/r$ ilustruje sobě-podobnost poblíž NS.

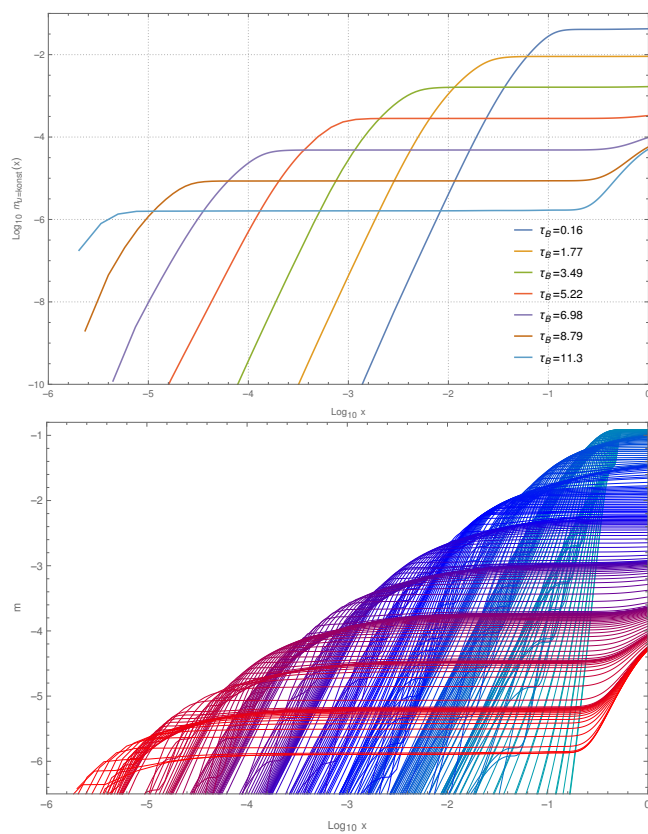
Výsledky simulací poblíž kritického p^*

Připomeňme, že když se přibližujeme kritickému p^* , zaznamenáváme oscilace na stále menší škále. Globální obrázky tedy vypadají velmi podobně, vlna se buď rozplyne nebo se vytvoří černá díra. Její hmotnost ale může být velmi malá.

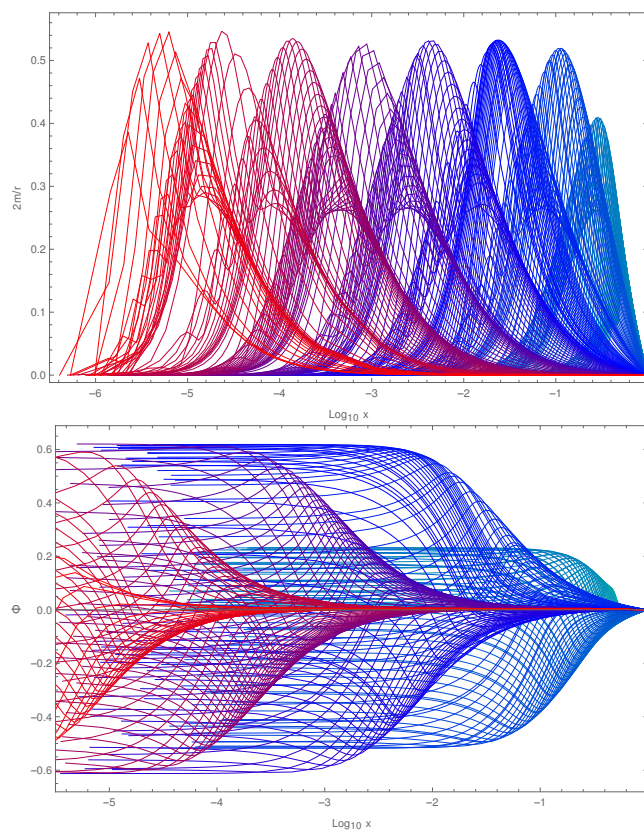
Při kreslení chování poblíž p^* se hodí používat bezrozměrné veličiny, ty se při zmenšení škály nemění (na horizontu musí např. být bezrozměrná veličina $2m/r = 1$). Věci, které mají rozměr délky je třeba vynášet v logaritmické škále.

Literatura

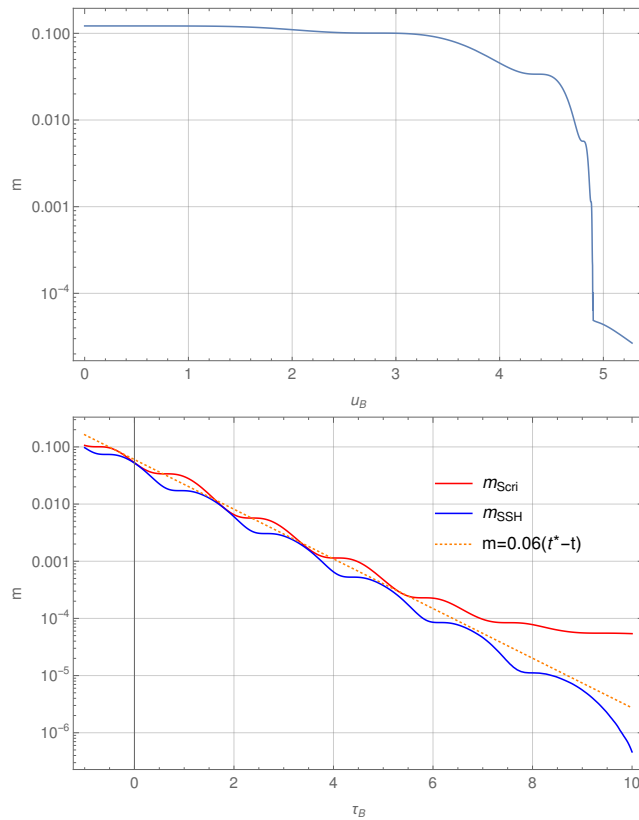
- [Choptuik1993] M. W. Choptuik, *Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field*, Phys. Rev. Lett. **70**, p. 9-12 (1993).
- [PuerrerEtAl2005] M. Pürrer, S. Husa, and P. C. Aichelburg, *News from critical collapse: Bondi mass, tails, and quasinormal modes*, Phys. Rev. D **71** 104005 (2005).
- [Puerrer2008] M. Pürrer, *Global versus Local Aspects of Critical Collapse*, Ph.D. Thesis, arxiv.org/abs/0708.1914 (2008).
- [PolniRovnice] Příloha k přednášce.
- [Gundlach1999] Carsten Gundlach, *Critical Phenomena in Gravitational Collapse*, Living reviews in relativity, Potsdam (1999).



Obrázek 10: Vývoj radiálního průběhu $m(u, x)$. Vlevo jsou vybrány časy, kdy se energie pole soustředí do tenké slupky.



Obrázek 11: Vlevo: Vývoj radiálního průběhu $2m/r$. Vpravo: Vývoj radiálního průběhu Ψ .



Obrázek 12: Hmotnost prostoročasu u \mathcal{J}^+ . Vlevo: Při použití Bondiho času. Vpravo: Při použití soběpodobného času τ_B . Vpravo je podle nápadu z [PuerrerEtAl2005] vyznačena i hmotnost měřená na SSH. Rozdíl odpovídá hmotě pole ležícího vně SSH. Škálování vyznačené čárkovanou čarou říká, že hmotnost se škáluje stejně jako velikost oblasti SSH.