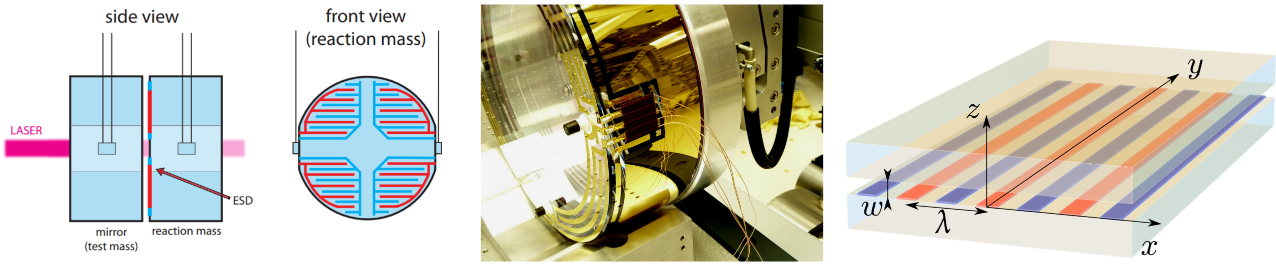
Domácí úloha z Klasické elektrodynamiky

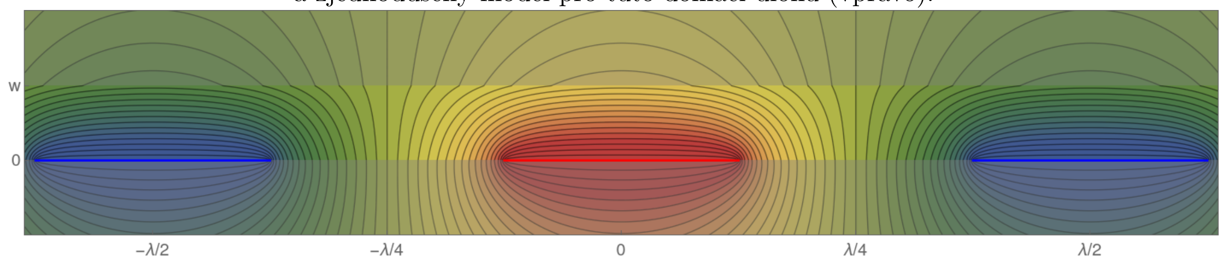
Úvod

V iterferometrických detektorech gravitačních vln je třeba velmi jemně pohybovat zrcadly interferometru. Využívá se elektrostatického působení mezi sadou elektrod a křemenným dielektrikem zrcadla (Obr 1.).

V rámci domácí úlohy nalezněte sílu, jakou působí soustava rovnoběžných páskových elektrod na dielektrický objekt. Problém je zjednodušen do podoby modelu na Obr. 2, kdy plošné páskové elektrody tvoří pravidelně rozložené pruhy nulové výšky (tloušťky) v celé rovině $z = 0$. Kladná a záporná elektroda se nacházejí na potenciálu $\pm U$, jsou široké $\lambda/4$ a stejně široká je i mezera mezi nimi. Pro jednoduchost zvolíme počátek souřadnic na ose kladné elektrody. Dielektrická prostředí jsou zjednodušena do podoby poloprostoru $z \leq 0$ (na jehož hranici jsou umístěny elektrody) a poloprostoru $z > w$ (který představuje zrcadlo). Obě prostředí jsou vyplněna stejným homogenním dielektrikem s relativní permitivitou ϵ_r. Místo celkové síly, která by byla nekonečná, budeme hledat její plošnou hustotu tedy tlak.



Obr. 1. Principiální schéma (vlevo), skutečný tvar elektrod u detektoru Advanced LIGO (uprostřed) a zjednodušený model pro tuto domácí úlohu (vpravo).



Obr. 2. Ekvipotenciály elektrického pole v našem modelu. V dolní části obrázku jsou (v rovině $z = 0$) pravidelně rozmístěny plošné vodivé elektrody uvedené na hodnotu potenciálu $\pm U$ (červená $+U$, modrá $-U$). V hodní ($z > 1/2$) i dolní části ($z < 0$) vidíme pole uvnitř dielektrika s $\epsilon_r > 1$. Zejména na horním rovinném rozhraní se nespojitost elektrického pole projevuje zalomením ekvipotenciál.

Polní rovnice

Vyjdeme z toho, že uvažovaná periodicky uspořádaná nekonečná soustava elektrod budí jednodušší pole, než např. jediná dvojice elektrod. To proto, že periodické funkce lze rozložit do Fourierovy řady. Proto:

1. Nalezněte funkci h tak, aby pro $z \neq 0$ elektrostatický potenciál

$$\Phi(x, z) = [p_k \cos(kx) + q_k \sin(kx)]\, h(|z|)$$

splňoval Laplaceovu rovnici a podmínku $\lim\limits_{z\to\pm\infty} \Phi_k(x, z) = 0$.

2. Pokud uvážíte, že $|x|'' = 2\delta(x)$ a že $|x|' = \pm 1$, jaký význam má nábojová hustota spočtená z Poissonovy rovnice pro uvažované Φ ?

Symetrie

Zkoumejte omezení, jaká pro hodnoty k, p_k, q_k vyplývají ze symetrií

$$\begin{aligned} T: &\quad \Phi(x + n\lambda, z) = \Phi(x, z), \quad n \in \mathbb{Z} && (1)\\ P: &\quad \Phi(-x, z) = \Phi(x, z), && (2)\\ C: &\quad \Phi(x + \lambda/2, z) = -\Phi(x, z). && (3) \end{aligned}$$

3. Jaký mají symetrie T, P a C význam? Z kterých tvrzení v zadání jednotlivé symetrie vyplývají?
4. Co vyplývá z těchto symetrií pro směr elektrického pole v $x = 0$ a v $x = \lambda/4$?
5. Jak vypadá nejobecnější řešení $\Phi_k(x, z)$ splňující všechny tyto symetrie?
6. Jak vypadá množina $\mathcal{K}$ tvořená všemi přípustnými hodnotami k tak, aby Φ_k byly navzájem lineárně nezávislé funkce? Zvolte bázi řešení $\Psi_k(x, z)$ tak, aby bylo možno pro superpozici používat zápis ve tvaru součtu

$$\tilde{\Phi}(x, z) = \sum_{k_i \in \mathcal{K},\, i \in \mathbb{N}} a_k \Psi_{k_i}(x, z),$$

tedy, že lze přípustné hodnoty k očíslovat celými čísly $i = 1, 2, ...$ a tedy psát k_i.

Rozhraní prostředí

Uvažovaný problém znamená řešit rovnici $\Delta\Phi = 0$ ve třech oblastech $a = 1, 2, 3$ odpovídajících $\Omega_1 : \{\vec{x} \mid z < 0\}, \Omega_2 : \{\vec{x} \mid 0 < z < w\}$ a $\Omega_3 : \{\vec{x} \mid z > w\}$, kde na rozhraních je potřeba splnit podmínky

$$\vec{n} \times \left[\vec{E}\right] = 0, \quad \vec{n} \cdot \left[\vec{D}\right] = 0,$$

kde $\vec{D}^{(a)} = \epsilon_0 \epsilon_r^{(a)} \vec{E}^{(a)}$. Vlastnosti prostředí jsou $\epsilon_r^{(1)} = \epsilon_r^{(3)} = \epsilon_r$ a $\epsilon_r^{(2)} = 1$. Používáme označení pro nespojitost pole $[\vec{E}] = \lim_{\epsilon \to 0} \vec{E}(\vec{x}_0 + \epsilon\vec{n}) - \vec{E}(\vec{x}_0 - \epsilon\vec{n})$ v bodě $\vec{x}_0$ ležícím na rozhraní ve směru normály $\vec{n}$ k tomuto rozhraní.

Kvůli existenci dvou význačných ploch $z = 0$ a $z = w$ budeme od teď předpokládat, že elektrostatický potenciál vznikne superpozicí polí zdrojů na rovinách $z = 0$ a $z = w$ a má tak tvar

$$\Phi(x, z) = \sum_{k_i \in \mathcal{K},\, i \in \mathbb{N}} a_i \Psi_{k_i}(x, z) + \sum_{k_i \in \mathcal{K},\, i \in \mathbb{N}} b_i \Psi_{k_i}(x, z - w).$$

7. Jaká rovnice R_1 pro potenciál $\Phi(x, z)$ platí v místech, kde jsou elektrody?
8. Jaká rovnice R_2 pro potenciál $\Phi(x, z)$ vyplývá z podmínek na rozhraní $z = 0$ v místech, kde nejsou elektrody?
9. Jaká rovnice R_3 pro potenciál $\Phi(x, z)$ vyplývá z podmínek na rozhraní $z = w$?
10. Jaké řešení má rovnice R_3, má-li být splněna podél celého rozhraní $z = w$, pokud za neznámé považujeme koeficienty b_i?

Síla

11. Spočtěte plošnou hustotu z-složky síly (tlak), kterou působí elektrické pole na (vázané) náboje v rovině $z = w$. Jaká je tato hodnota $\bar{p}$ po zprůměrování přes periodu $x \in (0, \lambda)$? Jaká je výsledná síla působení nábojů v rovině $z = w$ na tytéž náboje? Lze to zdůvodnit nějakou symetrií ve vztazích pro jejich elektrické pole?

Přibližné řešení

Za neznámé nyní uvažujte pouze hodnoty a_1 a b_1, ostatní zanedbejte (položte rovny nule).
12. Spočtěte $a_1, b_1, \bar{p}$ pokud budete požadovat splnění R_1 v $x = z = 0$ a R_3 v $x = 0, z = w$.