

Zadání domácí úlohy z Klasické elektrodynamiky

Úvod

Vířivé proudy představují známý a často využívaný jev popsáný kvazistacionární aproximací Maxwellových rovnic. Jednou z aplikací je magnetická levitace permanentního magnetu nad pohybující se dobře vodivou kolejnicí. Pro účely této úlohy bude mít kolejnice podobu nekonečného poloprostoru $z < 0$ s homogenní vodivostí γ .

V úloze jde o to za zjednodušujících předpokladů spočítat vzájemnou sílu mezi magnety a vířivými proudy v kolejnici. Úlohu budeme ovšem uvažovat sedíce ve vlaku, takže magnetické pole i související vířivé proudy budou stacionární (t.j. nezávislé na čase). Místo vlaku se tedy pohybuje konstantní rychlostí \vec{v} kolejnice, přičemž zachování translační symetrie vyžaduje $v_z = 0$.

Magnetické pole

Uvažujte magnetické pole dané skalární funkcí $\psi(\vec{x})$ předpisem

$$\vec{B} = \nabla \times (\vec{e}_z \times \nabla \psi).$$

Tato volba je dána tím, že chceme (i) automaticky splnit podmínku $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, (ii) vystačit ve výpočtech s jedinou neznámou funkcí a (iii) popsat situaci, kdy je magnetický tok směřován do kolejnice a můžeme tak m.j. očekávat levitaci.

- Nalezněte proudové pole, jaké takové magnetické pole budí.
- (Prémiová otázka) Jaké magnetické pole popisuje

$$\psi(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{N(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad ?$$

- Uvažujte v pohybující se kolejnici Ohmův zákon ve tvaru $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ a předpokládejte, že elektrické pole vymizí. Jakou podobu bude za těchto předpokladů mít polní rovnice pro \vec{B} ?
- Pro jaký směr rychlosti $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y$ tato rovnice připouští řešení ve tvaru

$$\psi(x, y, z) = e^{ikx} e^{\alpha z},$$

kde k je pevně dáno geometrií magnetů? Jaké hodnoty α jsou přípustné ve vzduchové mezeře mezi magnety a kolejnicí $0 < z < h$? Která z těchto hodnot α_1 může příslušet poli buzenému magnety, které jsou umístěny v $z > h$?

- Která z těchto hodnot α_2 může odpovídat magnetickému poli, které ve vzduchové mezeře vytváří vířivé proudy v kolejnici?
- Jaká je hodnota α_3 v objemu vodivé kolejnice $z < 0$ pro danou konstantní rychlost v ? Proč je přípustná jen jedna z možných hodnot α_3 ?
- Uvažujeme-li uvnitř vodiče kolejnice amplitudu a_3 , tedy $\psi(x, z < 0) = a_3 e^{ikx} e^{\alpha_3 z}$ a v prostoru těsně nad kolejnicí superpozici $\psi(x, z > 0) = e^{ikx} (a_1 e^{\alpha_1 z} + a_2 e^{\alpha_2 z})$, jaké hodnoty konstant a_2 a a_3 vyplývají ze spojitosti magnetického pole na povrchu kolejnice?

Silové účinky vířivých proudů

V našem modelu je levitační magnet nekonečně veliký, proto je třeba mluvit o velikosti síly na jednotku plochy, kterou je ale třeba volit v násobku periody funkce e^{ikx} . Dále je třeba nezapomenout, že v komplexní notaci pro integrál součinu veličin $U = u e^{ikx}$ a $V = v e^{ikx}$ přes celočíselný násobek period platí, že

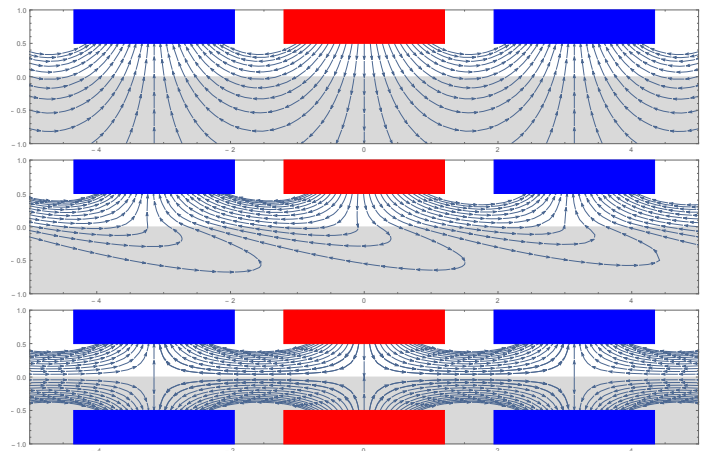
$$\int_a^b \text{Re}(U) \text{Re}(V) dx = \frac{b-a}{2} \text{Re}(uv^*).$$

- Spočtěte, jakou silou působí magnety na kolejnici, tedy

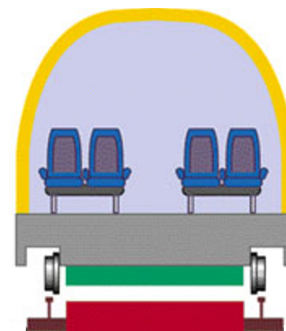
$$\vec{F} = \int \vec{j} \times \vec{B} dV.$$

- Jaký je poměr F_x/F_z , tedy efektivní součinitel smykového tření pro hliníkovou kolejnici, $k = 2\pi/(40\text{cm})$ a $v = 500\text{km/h}$?
- Při jaké rychlosti dosáhne systém 50% maximální 'vztlakové' síly?
- Spočtěte s použitím Maxwellova tensoru, jakou silou na magnety působí proudy v kolejnici

$$F_i = \oint T_{ij} dS_j.$$



Obr. 1. Siločáry magnetického pole vytvářeného střídavě orientovanými magnety (modrá, červená) pro stojící (nahore) a pohybující se vodivou kolejnici (uprostřed). Z podoby siločar lze usoudit, že pohybující se kolejnice bude magnety odpuzovat podobně, jako by se uvnitř kolejnice nacházely opačně orientované magnety (dole).



Obr. 2. Princip levitace vlaku za pomoci permanentních magnetů (zeleně) a vodivé kolejnice (červeně).