Nehomogenní vlnová rovnice

Viděli jsme, že ve vakuu lze s použitím Lorentzovy kalibrace soustavu 4 Maxwellových rovnic převést na soustavu dvou vlnových rovnic

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(\vec{r},t) = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r},t) \tag{2}$$

Podobně jako tomu bylo v elektrostatice je možné hledat řešení těchto rovnic ve tvaru integrálu součinu vhodné (Greenovy) funkce souřadnic $\vec{r}$ a $\vec{r}'$ a, řekněme, nábojové hustoty v bodě $\vec{r}'$. Jakkoli je možné vzhledem k jedinečnosti tohoto řešení přímo výsledek napsat a poté ověřit (viz důležitý příklad X.1 v [1]), zkusíme použít postup z [1] abychom viděli, kde se vezme známý tvar řešení s retardovanými zdroji. I když je v časově proměnném případě tento přístup v rozporu se zachováním náboje, budeme si Greenovu funkci i v tomto případě představovat jako řešení polních rovnic s bodovým zdrojem na pravé straně.

Používáme-li následující konvenci pro Fourierovu transformaci

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \tag{3}$$

přejde ve frekvenčním obraze časová derivace na násobení

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\Phi(\vec{r},\omega) = -\frac{\rho(\vec{r},\omega)}{\epsilon_0} \tag{4}$$

Po vzoru Greenovy funkce pro Poissonovu rovnici rozložíme zdroj na “bodové náboje”

$$\rho(\vec{r},\omega) = \int \rho(\vec{r}',\omega)\ \delta(\vec{r}' - \vec{r})\ d^3\vec{r}' \tag{5}$$

a budeme hledat potenciál $G_\omega(\vec{r},\ \vec{r}')$, který každý z těchto “bodových nábojů” (nachází se v bodě $\vec{r}'$) budí:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G_\omega(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}' - \vec{r}) \tag{6}$$

a pak řešení složíme z potenciálů od jednotlivých “nábojů”

$$\Phi(\vec{r},\omega) = \frac{1}{\epsilon_0}\int G_\omega(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}',\omega)\ d^3\vec{r}' \tag{7}$$

Pro $\omega = 0$ přechází problém na Poissonovu rovnici a příslušná Greenova funkce je

$$G_0(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{8}$$

S využitím translační symetrie úlohy, můžeme hledat $G_\omega(\vec{r},\vec{r}') = G_\omega(\vec{r}-\vec{r}')$ a stejně jako v případě $\omega = 0$ díky izotropii d'Alembertova operátoru předpokládat závislost jen na $G_\omega(\vec{r}-\vec{r}') = G_\omega(|\vec{r}-\vec{r}'|)$. Můžeme tedy vzít $\vec{r}' = 0$ a za použití vztahu $\Delta f(r) = (rf)''/r$ psát pro $r \neq 0$, kde hledáme řešení homogenní rovnice,

$$[rG_\omega(r)]'' + \frac{\omega^2}{c^2}[rG_\omega(r)] = 0 \tag{9}$$

což je známá diferenciální rovnice s dvěma nezávislými řešeními

$$[rG_\omega(r)] = Ae^{+i\frac{\omega}{c}r} + Be^{-i\frac{\omega}{c}r} \tag{10}$$

Budeme uvažovat obě řešení zvlášť a položíme $A = B = 1/(4\pi)$ aby řešení byla správně normovaná Greenova funkce.

$$G_\omega(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{11}$$

Zvláště v technických výpočtech, kdy pro zdroje předpokládáme harmonické časové závislosti, může představovat tato Greenova funkce vlnové rovnice výchozí bod výpočtů. Pro porozumění povaze řešení nehomogenní vlnové rovnice ale převedeme tuto funkci zpět do časového obrazu.

Speciální tvar závislosti na ω odpovídá posunutí v čase:

$$f(\omega) = f_0(\omega)e^{\pm i\omega\tau} \;\rightarrow\; f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\omega t} f_0(\omega) e^{\pm i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\omega(t\mp\tau)} f_0(\omega) d\omega = f_0(t\mp\tau) \tag{12}$$

Proto tedy

$$\Phi(\vec{r},\omega) = \frac{1}{\epsilon_0}\int G_\omega(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}',\omega)\; d^3\vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho(\vec{r}',\omega)\; d^3\vec{r}' \tag{13}$$

má časový obraz

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t\mp\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\; d^3\vec{r}' \tag{14}$$

Podobě pro vektorový potenciál máme

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}',t\mp\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\; d^3\vec{r}' \tag{15}$$

Rozdílná znaménka reprezentují retardovaný a avancovaný potenciál. Jakákoli jejich vhodně normovaná lineární kombinace splňuje původní nehomogenní vlnové rovnice. Pokud ale nemáme závažné důvody činit jinak, bereme vždy za řešení potenciály retardované, a náboje chápeme jako zdroje a příčinu pole.

Jakkoli vzorce s retardovaným zdrojem vypadají velmi podobně vztahům z elektro-magneto-statiky, je pro konkrétní zdroje závislé na čase často těžké spočíst již jen retardovaný čas, natož příslušný integrál. Pro praktické výpočty se tak často musíme přejít do frekvenčního obrazu (např. předepíšeme harmonický průběh proudů v anténě vysílající elektromagnetické vlny). Pro pohybující se bodovou částici lze ale uvedené potenciály spočíst.

Pole nerovnoměrně se pohybujíci nabité částice

Příkladem, na kterém se často ilustruje pojem δ-funkce je bodový náboj, zde navíc ukážeme, že správná manipulace s δ-funkcemi přináší zřejmé usnadnění výpočtů, a tedy, že takový popis je někdy výhodný.

Bodový náboj q pohybující se po trajektorii $\vec{r}_0(t)$ je popsán hustotou

$$\rho(\vec{r}',t) = q\;\delta^3(\vec{r}'-\vec{r}_0(t))$$

Pro potenciál tedy píšeme

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{q\;\delta^3(\vec{r}'-\vec{r}_0(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}))}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\; d^3\vec{r}' \tag{16}$$

Abychom mohli integraci přes prostorové souřadnice provést, museli bychom počítat Jacobián parametru δ-funkce, místo toho ale můžeme tak jako dosud použít postup z [1]. Protože

$$f(r,t-r/c) = \int f(r,t')\delta(t-t'-r/c)dt'$$

můžeme psát

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta^3(\vec{r}'-\vec{r}_0(t'))\;\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\; d^3\vec{r}'\; dt' \tag{17}$$

tedy po již jednoduché integraci přes $\vec{r}'$

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\; dt' \tag{18}$$

V tomto vztahu $\vec{r}$ a t označují událost kde+kdy "zkoumáme" potenciál a $\vec{r}_0(t')$ a t' označují událost "vyzáření informace" směrem k výzkumníkovi potenciálu, tedy kde ten částici v době výzkumu "vidí" skrze vlnění šířící se rychlostí c, jenž mu o ní přináší informaci. Událost $t, \vec{r}$ leží na budoucím světelném kuželi události t',$\vec{r}_0(t')$, což je popsáno rovnicí

$$t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} = 0 \tag{19}$$

Místo výpočtu Jacobiánu teď vystačíme s jedinou derivací, kterou dosadíme do vztahu

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)$$

kde předpokládáme, že $f(x) = 0$ má jediný kořen x_0.

Protože integrační proměnná je t', musíme spočíst derivaci levé strany (19) podle t':

$$\frac{d}{dt'}(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}) = -(1 - \vec{\beta}.\vec{n}) \ ,$$

kde jsme použili vztah

$$\frac{\partial|\vec{X}|}{\partial s} = \frac{\vec{X}}{|\vec{X}|}.\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \tag{20}$$

a zavedli označení pro rychlost částice a směr od její polohy v retardovaném čase do bodu $\vec{r}$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}_0}{c} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\vec{r}_0(t') \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}$$

Označíme-li řešení rovnice (19) t'_0, pak dosazením dostáváme

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}\, dt' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(t' - t'_0)}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}\, dt' \tag{21}$$

Pro elektromagnetické potenciály pohybujícího se bodového náboje tedy dostáváme

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t'_0)|}\,\frac{1}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}} \tag{22}$$

a

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\ \vec{v}_0(t'_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t'_0)|}\,\frac{1}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\ \vec{\beta}/c}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\,\frac{1}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}} \tag{23}$$

jenž lze spočíst z proudu

$$\vec{j}(\vec{r}', t) = \vec{v}_0\rho \ = qv_0(t)\ \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_0(t))$$

který je součinem nábojové hustoty a rychlosti a tak je výpočet vektorového potenciálu až na faktor $\mu_0\epsilon_0\vec{v}_0 = \vec{v}_0/c^2$ zcela schodný.

Jak jsme právě viděli znamená výskyt retardovaných časů jistou komplikaci ve výpočtu, která se pak ve výsledku projeví nečekaným faktorem $(1-\vec{\beta}.\vec{n})^{-1}$. Co víc, protože pracujeme s obecně časově závislými potenciály, nemáme dostečnou intuici (jako tomu bylo v elektrostatice) abychom z tvaru potenciálů viděli vlastnosti pole $\vec{E}$, natož $\vec{B}$. Proto si jako ilustraci zkusíme spočíst z výše uvedených potenciálů důležitou část výrazu pro $\vec{E}$, jenž je úměrná zrychlení částice, a, jak uvidíme, ubývá se vzdáleností mnohem pomaleji, než vlastní Coulombické pole náboje.

Zářivé pole bodového náboje

Platí

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad\qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}\ .$$

V potenciálech (22-23) se vyskytují následující veličiny závislé na $\vec{r}$ a t:

$$r_0 = r_0(t_0'(\vec{r},t))$$

$$v_0 = v_0(t_0'(\vec{r},t)) = \frac{d}{dt'}\vec{r}_0(t')$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t_0'(\vec{r},t))}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t_0'(\vec{r},t))|}$$

Derivací vztahu

$$t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} = 0$$

podle času za použití (20) dostáváme

$$1 - \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{n}.\frac{dr_0(t')}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial t} = 0$$

tedy

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{\beta}\vec{n}} \ ,$$

zatímco gradient téže rovnice dá

$$-\frac{\partial}{\partial r_i}t' - \frac{1}{c}n_j\left(\delta_{ji} - \frac{d(r_0)_j(t')}{dt'}\frac{\partial}{\partial r_i}t'\right) = 0$$

tedy

$$\nabla t' = \frac{-\vec{n}/c}{1 - \vec{\beta}\vec{n}} \ .$$

Derivace $\vec{n}$ naštěstí nebudeme potřebovat, protože klesají jako $1/R$, kde $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$. Prostorové a časové derivace veličin jako je např. v_0 spočteme podle vztahu

$$\nabla f(t') = \frac{\partial f}{\partial t'}\nabla t' = \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{-\vec{n}/c}{1 - \vec{\beta}\vec{n}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t') = \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{1}{1 - \vec{\beta}\vec{n}}$$

Celkem tři členy ve výrazu pro $\vec{E}$ obsahují derivaci rychlosti, jenž dá zrychlení. Zároveň si lze povšimnout, že členy, které zanedbáváme ubývají s R rychleji, než ty jenž uvažujeme. Detailně si to ale komentovat nebudeme, neboť víme, že pole nezrychleného náboje je jen Lorentzovsky transformované Coulombické pole a tedy klesá jako $1/R^2$.

V potenciálu Φ se rychlost vyskytuje jednou

$$\nabla\Phi = \nabla\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{R}\ \frac{1}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}} = ... + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{R}(-1)\frac{\nabla(1 - \vec{\beta}.\vec{n})}{(1 - \vec{\beta}.\vec{n})^2} = ... + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{R}\frac{(-\dot{\vec{\beta}}.\vec{n})(\vec{n}/c)}{(1 - \vec{\beta}.\vec{n})^3}$$

Při výpočtu časové derivace $\vec{A}$ narazíme na rychlost v čitateli i jmenovateli

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\ \frac{\vec{\beta}/c}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}} = ... + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\ \left[\frac{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\beta}/c}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}} + \vec{\beta}/c\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}}\right]$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = = ... + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\ \left[\frac{\frac{\dot{\vec{\beta}}}{c}\frac{1}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}}{1 - \vec{\beta}.\vec{n}} + \frac{\beta}{c}\frac{\dot{\vec{\beta}}.\vec{n}\frac{1}{1-\vec{\beta}.\vec{n}}}{(1 - \vec{\beta}.\vec{n})^2}\right]$$

Sečtením získáme

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = ... - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{Rc}\frac{1}{(1 - \vec{\beta}.\vec{n})^3}\left(-(\dot{\vec{\beta}}.\vec{n})\vec{n} + \dot{\vec{\beta}}(1 - \vec{\beta}.\vec{n}) + \vec{\beta}(\dot{\vec{\beta}}.\vec{n})\right) \tag{24}$$

Protože platí $\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] = (\vec{n} - \vec{\beta})(\dot{\vec{\beta}}.\vec{n}) - \dot{\vec{\beta}}(1 - \vec{\beta}.\vec{n})$ můžeme část pole $\vec{E}$ závislou na zrychlení částice psát

$$\vec{E} = ... + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{Rc}\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta}.\vec{n})^3} = ... + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{Rc^2}\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}]}{(1 - \vec{v}.\vec{n}/c)^3} \doteq ... + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\dot{\vec{v}}_\perp}{Rc^2} \tag{25}$$

kde jako poslední je uvedeno nerelativistické přiblížení, v němž je použito označení $\dot{\vec{v}}_\perp = \vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{v}})$.

Podrobným výpočtem lze ukázat, jak vypadá část pole nezávisející na zrychlení a také, že magnetické pole se řídí vztahem známým z rovinné elekromagnetické vlny

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n} \times \vec{E} \tag{26}$$

Díky tomu a faktu, že uvažovaná část elektrického pole je kolmá na $\vec{n}$, dostáváme, že Poyntingův vektor splňuje relaci známou pro vlny $\vec{S} = c\vec{n}w$, kde $w = (\vec{E}.\vec{D} + \vec{B}.\vec{H})/2$ je hustota energie elektromagnetického pole.

Navíc faktor $1/R$ zaručuje, že tok energie přes sféru o nekonečném poloměru je nenulový (to kvazistacionární pole lokalizovaných nábojů a proudů nedokáží).

Zatímco vynechaná část elektrického pole poybujícího se náboje odpovídá Coulombickému poli a ubývá jako $1/R^2$, námi studovaná složka závislá na zrychlení ubývá jako $1/R$. Z rozměrových důvodů musí jít elektrické pole psát jako

$$E \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{RH}\right) ,$$

kde H je veličina s rozměrem délky nějak souvisí se zrychlením částice. Pro $R \ll H$ převládá coulombické pole, naopak pro $R \gg H$ převládá záření. Pro takto velká R mluvíme proto o radiační zóně, kde můžeme ostatní členy zanedbat. Pokud stále uvažujeme jednu částici, z kinematiky zjistíme, že velikost H je zhruba vzdálenost na níž by s uvažovanýcm zrychlením částice nabyla relativistických rychlostí. I v případě, že záření vzniká kolektivním přespěním mnoha nábojů, řekněmě v anténě, má smysl mluvit o radiační zóně jako o oblasti, kde pole má již převážně podobu elektromagnetické vlny. Jak uvidíme v následujícím příkladě, začíná radiační zóna obvykle blíže zdroji než bychom z výše uvedeného čekali.

Vyzařovací charakteristika a elektrické dipólové záření

V radiační zóně můžeme pro Poyntingův vektor s psát

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{c\mu_0}(\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{\vec{n}}{c\mu_0}|\vec{E}|^2 = c\vec{n}\ \epsilon_0\ |\vec{E}|^2 ,$$

kde, stejně jako u rovinné vlny, jsme využili kolmost $\vec{E}$ na $\vec{n}$ a vztahu $c^2\epsilon_0\mu_0 = 1$. Dosazením konkrétního tvaru $\vec{E}$ dostáváme

$$|\vec{S}| = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 R^2 c^3}\frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}]\ |^2}{(1 - \vec{v}.\vec{n}/c)^6} \sim \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 R^2 c^3}|\dot{\vec{v}}_\perp\ |^2 \tag{27}$$

Šestá mocnina výrazu $1 - \vec{v}.\vec{n}/c$ souvisí s aberací a Dopplerovým jevem a může při vyšších rychlostech částice rozhodujícím způsobem určovat směr, kterým je záření vysíláno. V nerelativistickém případě je směr toku energie dán výrazem $|\dot{\vec{v}}_\perp|^2 = |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{v}})|^2 = |\dot{\vec{v}}|^2 \sin^2\vartheta$, kde ϑ je úhel mezi (retardovaným) směrem k pozorovateli a směrem zrychlení.

Jako nejjednosušší případ si vybereme vyzařování nepohybujícího se v čase proměnného dipólu tvořeného opačně nabitými částicemi. Protože je výsledné pole lineární superpozicí polí obou nábojů, stejně jako dipólový moment soustavy, můžeme pro zjednodušení jeden z nábojů ponechat v klidu v počátku, zatímco druhý se bude v jeho blízkosti pohybovat po ose z. Při tomto modelu bude dipólový moment systému $\vec{p}(t) = q\vec{r}(t) = p(t)\vec{e}_z$. Proto v nerelativistickém vztahu pro elektrické pole v radiační zóně můžeme kombinaci $q\dot{\vec{v}}_\perp$ nahradit $\ddot{\vec{p}}_\perp$. Velikost $|\ddot{\vec{p}}_\perp| = |\ddot{p}(t)\sin\theta|$ tedy

$$\vec{S} = \frac{|\ddot{p}|^2}{16\pi^2\epsilon_0 R^2 c^3}\ \sin^2\theta\ \vec{e}_r$$

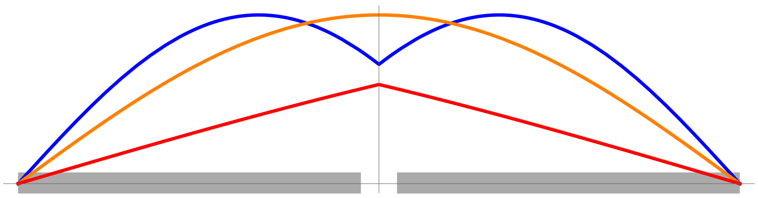
Protože pro integrál přes povrch koule o poloměru r platí $\int \sin^2\theta dS = (8/3)\pi r^2$, bude za předpokladu, že $r \doteq R$, tedy že amplituda pohybu náboje v našem modelu dipólu je mnohem menší než vlnová délka, platit

$$I = \int \vec{S}.d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2|\ddot{p}|^2}{3c^3}$$

Protože platí princip superpozice, popisuje tento výsledek výkon záření, jenž opouští velmi malou (v porovnání s vlnovou délkou) soustavu nábojů s dominujícím elektrickým dipólovým momentem a to i v případě, kdy se směr dipólového momentu libovolně mění, v nerelativistém přiblížení jsme viděli, že záření je členem $\sin^2\theta$ koncentrováno do roviny kolmé k vektoru zrychlení. Důležité je vidět, že zatímco pole dipólu klesá jako r^{-3}, tedy dokonce rychleji, než pole bodového náboje, radiační část pole stále přenáší energii do nekonečna díky chování $E \sim 1/r$. Podobně vyzařují záření až do nekonečna i systémy s dominujícími vyššími multipólovými momenty, každý chybějící faktor 1/R se ve vztazích pro intezity pole, hustotu energie či vyzářený výkon nahradí časovou derivací $(1/c)d/dt$. Jestliže je zdroj nezanedbatelně velký dochází k interferenci polí od jeho jednotlivých částí, což obvykle výrazně mění vyzařovací charakteristiku oproti dipólové $|\vec{S}| \sim \sin^2\theta$. Za součást zdroje také musíme považovat jakékoli vodiče či např. objekty s $\epsilon_r \neq 1$ nacházející se v jeho blízkosti.

Hertzův dipól

Studium pole urychleného náboje ukázalo vznik elektromagnetického záření z pohledu individuálního náboje. Velmi často ovšem vlny vznikají koordinovaným pohybem velkého množství nábojů. Důležitým modelem tohoto procesu je tzv. Hertzův dipól.



Přímý vodič (šedivě) dané délky je uprostřed přerušen a je zde napájen ze zdroje střídavého proudu. Za zjednodušujících předpokladů má proud podlél vodiče podobu stojatého vlnění (viz text). Vykresleny jsou průběhy pro tři frekvence.

Viděli jsme již u skinového jevu, že určení prostorového rozložení proudu ve vodiči vyžaduje řešení Maxellových rovnic. Pro pochopení chování drátové antény ovšem zkusíme přepokládat, že proud v tenkém vodiči se chová podobně jako proud doprovázející TEM vlnu a tedy, že na konci takového vodiče se proudová vlna odrazí a pozorujeme stojaté vlnění. Vodič délky $2d$ je uprostřed přerušen a je zde napájen ze zdroje střídavého proudu. Potom bude harmonický proud podél vodiče rozložen podle

$$I(z,t) = I_0 e^{-i\omega t}\sin\left[k(d-|z|)\right]. \tag{28}$$

Jako obvykle $k = \omega/c$. (Pozn. Rozmyslete si, že pro malé frekvence popisuje toto rozložení u velmi tenkého vodiče proud doplňující směrem od přívodů uprostřed náboj rozprostírající se na vodiči – z elektrostatiky m.j. víme, že na takovém vodiči je konstnatní lineární nábojová hustota.)

Budeme řešit vlnovou rovnici ve frekvenční oblasti

$$\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}, \tag{29}$$

jejíž řešení má, jak víme, podobu

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{j}(\vec{r}')\,d^3r' \doteq \frac{\mu_0}{4\pi r}\int e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{j}(\vec{r}')\,d^3r'. \tag{30}$$

Již zde jsme využili toho, že daleko od centra je $|\vec{r}-\vec{r}'| \sim r$ pomalu se měnící funkce. To ovšem neplatí pro komplexní exponenciálu. Zde užijeme

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = (\vec{r}-\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}') = r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' \tag{31}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r\left(1 - \frac{2}{r^2}\vec{r}\cdot\vec{r}' + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2} \doteq r - \vec{n}\cdot\vec{r}', \qquad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \tag{32}$$

Odsud

$$\vec{A} \doteq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r}'}\vec{j}(\vec{r}')\,d^3r'. \tag{33}$$

Faktor před integrálem (zejména pak po doplnění o časovou závislost $e^{-i\omega t}$ jasně popisuje odcházející slábnoucí sférickou vlnu. Integrál již závisí jen na směru $\vec{n}$ a popisuje vyzařovací charakteristiku naší idealizovné dipólové antény. Dále pokročíme nahrazením $\vec{j}(\vec{r}')\,d^3r' = I(z')dz'\vec{e}_z$ a dosazením $\vec{n}\cdot\vec{r}' = z'\cos\theta$. Je tedy třeba spočíst

$$\int_{-d/2}^{d/2} e^{ikz'\cos\theta}\sin\left[k(d-|z'|)\right]dz' = 2\int_0^{d/2}\cos\left(kz'\cos\theta\right)\sin\left[k(d-z')\right]dz'$$

$$= \frac{2}{k \sin^2 \theta} \left[\cos(kd \cos\theta) - \cos(kd)\right]$$

Tak dostáváme vektorový potenciál

$$\vec{A} \doteq \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{kr} \frac{\cos(kd\cos\theta) - \cos(kd)}{\sin^2\theta} \vec{e}_z. \tag{34}$$

Pracujeme v Lorentzovskzé kalibraci a pro naše harmonicky časově závislá pole bychom mohli potenciál ϕ dopočíst z kalibrační podmínky. Protože se ale stejně zajímáme jen o radiční zónu,

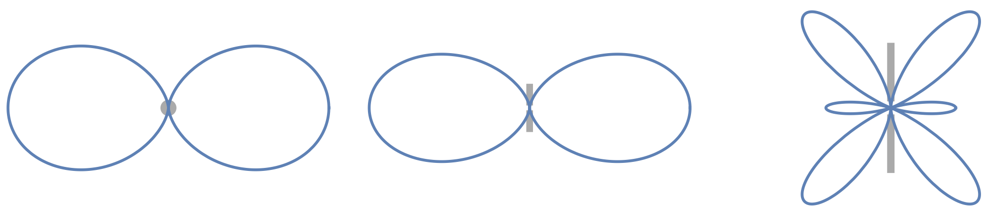
Lze snadno vidět s použitím $\nabla \times [f(\vec{r})\vec{e}_z] = \nabla f \times \vec{e}_z$, že jediný člen ubývající s $1/r$ vznikne derivováním exponenciály. Dále je $\nabla e^{ikr} = ik\vec{n}$ a $\vec{n} \times \vec{e}_z = \vec{e}_r \times \vec{e}_z = (\sin\theta \vec{e}_R + \cos\theta e_z) \times \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\phi$ a tedy radiační část magnetického pole je

$$\vec{B}_{\rm rad} \doteq -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{ie^{i(kr-\omega t)}}{r} \frac{\cos(kd\cos\theta) - \cos(kd)}{\sin\theta} \vec{e}_\phi. \tag{35}$$

V radiační zóně je $\vec{E} = -\vec{n} \times c\vec{B}$ a Poyntingův vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \mu_0^{-1}(-\vec{n} \times c\vec{B}) \times \vec{B} = c\mu_0^{-1}|\vec{B}|^2\vec{n}$, tedy pro vyzařovací charakteristiku dostaneme

$$r^2 < \vec{S} >= \frac{dP_{\rm rad}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi^2} \left(\frac{\cos(kd\cos\theta) - \cos(kd)}{\sin\theta}\right)^2. \tag{36}$$

Tato hodnota nezávisí na ϕ a lze ji tedy snadno zachytit graficky. Nezapomeňme, že anténa je dlouhá $2d$, tedy pro anténu dlouhou ξ-násobek vlnové délky $2d = \xi\lambda = \xi(2\pi)/k$, tedy $kd = \pi\xi$.



Vyzařovací charakteristika bodového dipólu (vlevo), idaelizované drátové dipólové antény s délkou $\lambda/2$ (uprostřed), a $3/2\lambda$ (vpravo).

Jak se skutečnost, že anténa vyzařuje energii jeví zdroji, jenž do antény dodává proud? Z jeho pohledu má anténa reálnou část impedance. Připomeňme, že ideální kondenzátor (což je limita malých frekvencí) odebírá čistě jalový výkon. Při rostoucích frekvencích bude z pohledu zdroje střídavého proudu nutno přidat do obvodového schématu sériový odpor. Jeho hodnota bude taková, aby v něm došlo právě ke „spálení" vyzářeného výkonu. Protože svorkami protéká proud, který dostanem dosazením $z = 0$ do (28), určíme tuto hodnotu z rovnosti

$$\frac{1}{2} R_{\rm rad} I_{\rm svork}^2 = \frac{1}{2} R_{\rm rad} I_0^2 \sin^2(kd) = \int \frac{dP_{\rm rad}}{d\Omega} d\Omega. \tag{37}$$

Pro v praxi důležitý půlvlnný dipól vyjde 73Ω. Povšimněte si, že tato úvaha nefunguje pro celovlnný dipól, pro něj by $I_{\rm svork}$ vyšlo nulové. To proto, že jsme proudové pole podél antény předepsali bez ohledu na splnění rovnic pole.

Síla působící na vyzařující částici

Zatímco pole v radiační zóně má docela přehledný tvar

$$\vec{S} = c\,\vec{n}\, w(\theta,\phi) = c\,\vec{n}\, w(\vec{n}) \tag{38}$$

v blízkosti zdroje záření je tvar Poyntingova vektoru velmi komplikovaný. Kdybychom dokázali nalézt pole v blízkosti zdroje splňující příslušné okrajové podmínky (obvykle tam jsou nějaké vodiče), dokázali bychom určit kolik z energie přiváděné, řekněme do rozlehlého deskového kondenzátoru se motá v jeho okolí a slouží jen k výrobě blízkých polí (jalové proudy) a kolik energie systém opustí a v podobě záření odletí pryč. Nalézt takové řešení lze v podstatě ale jen pro nejjednodušší problémy a to jen za silně omezujících předpokladů, např., že rozměry musejí být mnohem menší, než uvažovaná vlnová délka. To znamená, že třeba rozložení polí v okolí antény je analyticky nezvládnutelné, protože dobrá anténa nemůže být mnohem menší než vlnová délka.

Podobě je ale velmi komplikovaný i problém zdánlivě nejjednodušší – energetická bilance v okolí urychlované bodové částice. Důvodem pro to je, že klasická bodová částice je fyzikálním obrazem matematického objektu popsaného δ-funkcí a příslušnými Greenovými funkcemi. Ty mají velmi dobrý smysl v rámci lineární teorie svazující pole a jeho zdoje. Energie a její toky jsou ale popsány kvadratickými výrazy a tam jistota s níž používáme δ-funkce atp. končí.

Podobně, jako jsme provedli integraci odcházejícího výkonu u dipólu, lze (s trikem, kdy pro integraci zavedeme okamžité souřadnice tak, že osa z míří směrem okamžitého zrychlení) spočíst celkový výkon, který vyzařuje v daný okamžik částice s předepsaným pohybem $\vec{x}(t)$. Výsledný vztah se zaývá *Larmorova formule*

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2|\ddot{\vec{x}}|^2}{3c^3}. \tag{39}$$

To ale vyžaduje, aby na částici působilo odlétající elektomagnetické pole silou, která jí odejme příslušnou vyzářenou energii. Její výpočet vyžaduje pracný výpočet limity, kdy se stále menší částice stává bobovou a její pole stále silnější a jeho energie roste nade všechny meze. Existuje pojem *klasický poloměr elektronu*, což je poloměr sférické nabité slupky, jejíž energie je ekvivalentní právě hmotě elektronu. Limita bodové částice pak vyžaduje pokračovat ve zmenšování a nějak pracovat s energií pole převyšující ekvivalent hmotnosti částice, energií v limitě nekonečnou. Poté, co se vhodným postupem takového nekonečna zbavíme, zbyde v pohybové rovnici konečná síla úměrná druhé derivaci rychlosti. My si v následujícím zjednodušeném odvození ukážeme, že právě taková síla by mohla být odpovědná za výkon odnášený elektromagnetickými vlnami.

Pro jednoduchost uvažujme nabitou částici, která se nejdříve v časech $t \leq t_1$ nachází v rovnoměrném přímočarém pohybu, pak na ni chvíli působí všelijaké síly, které ji urychlují a brzdí, aby ji nakonec v $t \geq t_2$ ponechaly ve stejném rovnoměrném přímočarém pohybu. Taková částice podle (39) vyzáří energii

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} k|\dot{\vec{v}}|^2\,dt = k\int_{t1}^{t2} \dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}}\,dt = k\left(\left[\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\right]_{t1}^{t2} - \int_{t1}^{t2} \ddot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\,dt\right), \tag{40}$$

kde $k = (q^2/(6\pi\epsilon_0 c^3))$.

Předpokládáme, že energii do systému dodává nějaká síla $\vec{F}$ působící na částici

$$E = \int \vec{F}\cdot\vec{v}dt. \tag{41}$$

Protože okrajové členy jsou za daného počátečního a koncového stavu nulové za předpokladu platnosti zákona zachování energie dostáváme

$$0 = \int \left(-m\dot{\vec{v}} + \vec{F} + k\ddot{\vec{v}}\right)\cdot\vec{v}\;dt. \tag{42}$$

což by mohlo vést k domněnce, že pohybová rovnice pro nabitou částici musí být modifikována do tvaru

$$m(\vec{a} - \tau\dot{\vec{a}}) = \vec{F}, \tag{43}$$

kde $\tau = k/m$ je extrémně krátká charakteristická doba, pro elektron je $\sim 10^{-24}$ s, což je hodnota odpovídající času, který světlu trvá překonat klasický poloměr elektronu – to připomíná, že záření souvisí s jevem retardace.

To je ovšem jen stěží přijatelné: (1) je to diferenciální rovnice třetího řádu, (2) ta řešení na něž jsme z Newtonovské dynamiky zvyklí se ztrácejí mezi velmi ošklivými řešeními exponenciálně rostoucími v čase, (3) kdybychom chtěli vybrat mezi řešeními to správné (to poznáme podle toho, že dobře dopadne – viz naše podmínky na koncovou rychlost částice) máme jasně nekausální teorii.

Ukazuje se, že rozumný smysl lze Abrahamově-Lorentzově síle

$$\vec{F}_{\mathrm{brzd}} = k\dot{\vec{a}} \tag{44}$$

dát, pokud třetí derivaci polohy chápeme jako časovou derivaci zrychlení vypočteného z původní pohybové rovnice bez brzdné síly. Věci se komplikují ještě nutností zahrnout speciální relativitu, nicméně pro newtonovský model vodíkového atomu s pevným centrem máme původní sílu

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Po zderivování výrazu $k\vec{a} = k\vec{F}/m$ podle času dostaneme pravou stranu (44) a tedy

$$\vec{F}_{brzd} = -\tau\dot{\vec{F}} = -\tau\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\dot{\vec{x}}|\vec{x}|^2 - 3\vec{x}(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}})}{|\vec{x}|^5}.$$

Jde o sílu, která u klasické kruhové trajektorie působí proti směru rychlosti v souladu s obvyklým jevem disipace. Místo vazkých efektů má ale popisovat brždění v důsledku vyzařovaných elektromagnetických vln.

Cvičení: Vyjádřete u kruhové dráhy zrychlení jako funkci energie a sestavte za pomocí (39) diferenciální rovnici vyjadřující časový vývoj energie klasického vodíkového atomu. Spočtěte dobu jeho života.ž