Vzorové řešení písemné práce z Klasické elektrodynamiky

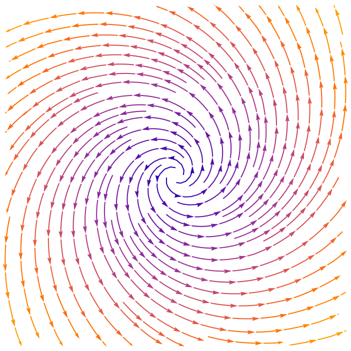
Mykyta Vasylyk

Úloha 1

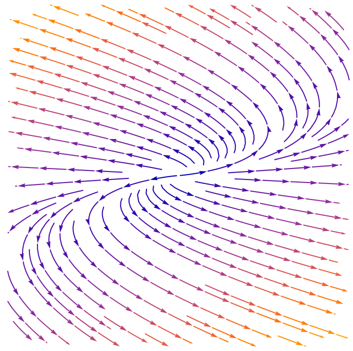
Nalezněte hodnotu parametru q, pro kterou je

$$\vec{A} = \vec{e}_x \left(-\left((7q+6)x^3\right) + 14(q+1)x^2y + 2(7q+9)xy^2 - 2y^3\right) + \vec{e}_y \left(2(7q+9)x^2y - 14(q+1)xy^2 - (7q+6)y^3 + 2x^3\right)$$

axiálně symetrické vektorové pole. Povšimněte si, že vektorové pole $\vec{B} = \vec{e}_x(x-2y) + \vec{e}_y(ax+by)$ je axiálně symetrické jen pro $a=2$ a $b=1$.



Vektorové pole $\vec{B}$ pro $a=2$ a $b=1$.



Vektorové pole $\vec{B}$ pro $a=0, b=1$ (nikoli $a=2, b=0$ v původním zadání).

Řešení

Nejprve si možné varianty postupu vysvětlíme na jednodušším poli $\vec{B}$.

• Na rozdíl od skalárního pole musíme u pole vektorového spolu s otočením souřadnic také otáčet složky vektorů. Pro transformaci

$$x' = \quad x\cos s + y \sin s, \tag{1}$$
$$y' = -x \sin s + y\cos s, \tag{2}$$

kterou zapíšeme $\vec{x}' = \mathbf{R}_s \vec{x}$, tedy musíme spočíst pole $\vec{B}'(\vec{x}) = \mathbf{R}_s^{-1}\vec{B}(\mathbf{R}_s\vec{x})$ a porovnat jej s $\vec{B}(\vec{x})$. Po troše úprav vyjde

$$\vec{B}' - \vec{B} = \left((2-a)x' + (1-b)y'\right)\sin(s)\,\vec{e}_x + \left((a-2)y' + (1-b)x'\right)\sin(s)\,\vec{e}_y.$$

Odsud vidíme, že a, b musejí mít výše uvedené hodnoty, aby bylo pole $\vec{B}$ axiálně symetrické. Zároveň tento postup vyžaduje používat trigonometrické identity, což by pro kubický polynom $\vec{A}$ bylo pracné.

• Doporučeným postupem je tak výpočet složek vektorového pole v nějaké axiálně symetrické bázi spjaté se souřadnicemi adaptovanými pro danou symetrii. Nejjednodušší bude použít souřadnice válcové (vlastně polární protože v zadání nevystupuje souřadnice z). U ortogonálních souřadnic používáme pro výpočet složek skalární součiny s bázovými poli, ty zde vyjádříme v kartézských souřadnicích, aby se nám snáze počítaly skalární součiny se složkami, které také mají v zadání úlohy podobu polynomů v kartézských souřadnicích,

$$\vec{e}_R = R^{-1}\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\right), \qquad \vec{e}_\phi = R^{-1}\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right).$$

Proto spočteme

$$B_r = \vec{B}\cdot\vec{e}_r = bR + (a-2)\frac{xy}{R} - (b-1)\frac{x^2}{R},$$
$$B_\phi = \vec{B}\cdot\vec{e}_\phi = 2R + (a-2)\frac{x^2}{R} + (b-1)\frac{xy}{R}.$$

I zde jsme museli použít zjednodušení, místo trigonometrické identity šlo o vztah $R^2 = x^2 + y^2$. Kombinace $x^2 + y^2$ je (až na násobek) jediná axiálně symetrická funkce ve tvaru kvadratického polynomu v x, y (přesněji homogenní polynom, proto konstantu neuvažujeme, i když je to také axiálně symetrická funkce). Abychom získali jednoznačný výraz, použili jsme tento vztah k odstranění všech y^2.

• Následující postup je jen pro ty z vás, kteří již z jiných předmětů vědí, že symetrie, jako je ta axiální, jsou svázány s vektorovým polem posunutí $\vec{\xi}$. Pro axiální symetrii je to $\vec{\xi} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$, které dává infinitesimální transformaci $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\xi}\delta\phi + O(\delta\phi^2)$.

Takováto posunutí pak také definují tzv. Lieovu derivaci $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}$, která říká jak se dané pole mění akcí $\vec{\xi}\,\delta\phi$. Pro skalární pole Φ je $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\Phi = \vec{\xi}\cdot\nabla\Phi$. Pro vektorové pole ale Lieova derivace kromě malého otočení souřadnic $\mathbf{R}_{\delta\phi}\vec{x}$ zahrnuje také onu operaci otočení vektoru $\mathbf{R}_{\delta\phi}^{-1}$ a proto Lieova derivace vektorového pole je definována

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\vec{B} = \vec{\xi}\cdot\nabla\vec{B} - \vec{B}\cdot\nabla\vec{\xi}.$$

Pole P je pak (axiálně) symetrické pokud je jeho Lieova derivace $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}P = 0$, přičemž jednotná podoba této rovnice pro skalární, vektorová, ... pole je umožněna vhodnou definicí Lieovy derivace závisející na druhu tenzorového charakteru P.

Tento rigoróznější postup dává

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\vec{B} = [(2-a)x + (1-b)y]\vec{e}_x + [(a-2)y + (1-b)x]\vec{e}_y$$

a má výhodu v tom, že nevyžaduje identifikaci axiálně symetrických skalárních výrazů, jako bylo x^2+y^2. Musí se ale provádět derivování a počítat ne úplně jednoduchá kombinace vektorových výrazů.

Z textu výše vyplývá, že pro pole $\vec{A}$ použijeme postup doporučený na přednášce a spočteme složky A_R a A_ϕ a zjistíme, kdy jsou to axiálně symetrické (skalární) funkce. Vytkeneme-li faktor $1/R$ jsou $\vec{e}_R, \vec{e}_\phi$ polynomy prvního řádu a tak výrazy RA_R a RA_ϕ budou homogenní polynomy 4. řádu. Pochopitelně, axiálně symetrický polynom čtvrtého řádu v souřadnicích x, y je (až na násobky) jen jeden a to

$$R^4 = (x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

Tak dostaneme

$$RA_R = -\left((7q+6)x^4\right) + 2(7q+8)x^3y + 4(7q+9)x^2y^2 - 2(7q+8)xy^3 - (7q+6)y^4.$$

Po odečtení vhodného násobku polynomu R^4 dostameme

$$RA_R - (-7q-6)R^4 = 2(7q+8)xy\left(x^2+3xy-y^2\right).$$

Výraz na pravé straně je axiálně symetrický, jen když je roven nule, a proto

$$q = -\frac{8}{7}.$$

Zbývá ještě ověřit, zda je i složka A_ϕ axiálně symetrická funkce, tedy spočteme $R\vec{e}_\phi\cdot\vec{A}$ a dostameme

$$RA_\phi = 3(7q+8)x^3y - 28(q+1)x^2y^2 - 3(7q+8)xy^3 + 2x^4 + 2y^4.$$

Dosadíme výše uvedenou hodnotu parametru q a získáme

$$RA_\phi|_{q=-\frac{8}{7}} = 2\left(x^2+y^2\right)^2,$$

což potvrzuje, že pro nalezenou hodnotu q je $\vec{A}$ axiálně symetrické vektorové pole.

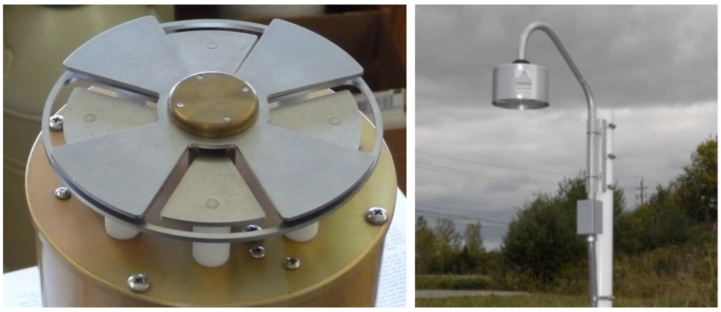
Úloha 2

K měření atmosferického elektrického pole se používají přístroje měřící náboj indukovaný na uzemněné elektrodě vystavené působení tohoto pole. Nejsilnější pole vyvolávají bouřkové mraky, a protože v takové situaci často prší (padající kapky nesou elektrický náboj a voda svojí vodivostí komplikuje elektrostatická měření), je pro snížení „rušení“ přístroj otočen tak, že měřící elektroda míří směrem k zemi. Přesvědčte se nalezením příslušného poměru, že ačkoli by podobná ochrana před povětrnostními vlivy nebyla rozumná např. u dalekohledu, zákony elektrostatiky dovolují měřit pole elektrických nábojů v mracích i při „pohledu“ do země.

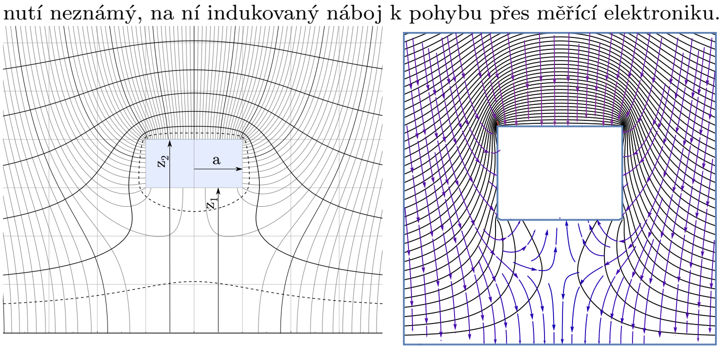
Uvažujte modelový problém, kdy pole neznámého rozložení náboje na povrchu (zhruba) válcového přístroje nahradíte polem dvou známých plošných zdrojů, jaké jsme nalezli při řešení pole vodivého disku.

Vyberte vhodné parametry zdrojů, aby podle vás odpovídaly poli uzemněného válce o poloměru $a = 150$mm a výšce spodní resp. horní podstavy nad zemí $z_1 = 500$mm a $z_2 = 650$mm. Zdroje v podobě disků uvažované v našem přibližném modelu umístěte do každé z podstav válce, u disků pak předpokládejte neznámé náboje Q_1, Q_2.

Dále předpokládejte, že země je rovina s potenciálem 0V a že neporušené atmosférické pole má intenzitu $E_x = E_y = 0, E_z = 400$V/m.



Ukázka konstrukce měřící elektrody (vlevo) a aktuálního umístění přístroje v terénu (vpravo). Princip přístroje spočívá v tom, že rotující uzemněná clonka střídavě zakrývá a odkrývá měřící elektrodu, čímž donutí neznámý, na ní indukovaný náboj k pohybu přes měřící elektroniku.



Pole uzemněného válce vystaveného homogennímu poli (vlevo) a jeho modelu (vpravo) založeného na superpozici dvou polí vodivých disků (a jejich obrazů „pod zemí“). Superponované pole samozřejmě již není v místě disků k nim kolmé, ale jako jednoduchý model skutečného pole válce je pro úlohu do písemky dostačující. Povšimněte si siločar spojujících oblohu a spodní podstavu válce.

a) Jak se v rovnicích projeví přítomnost *atmosférického elektrického pole* a jak vodivá *země* pod přístrojem?

b) Jak získáte *rovnice* pro neznámé náboje Q_1, Q_2? Jak tyto rovnice souvisejí s tím, že oba „disky“ mají nahradit vodič ve tvaru válce?

c) Jaké jsou číselné hodnoty nábojů Q_1, Q_2 uvažovaných diskových zdrojů?

d) Jaký *poměr* toků elektrického pole skrz horní a dolní podstavu válce dává váš model? Uveďte jak postup a předpoklady výpočtu, tak i číselnou hodnotu poměru. Protože jde o přibližný model, lze výpočet provést přibližně. Použitá zjednodušení nezapomeňte zdůvodnit.

Řešení

a) Při řešení elektrostatických úloh máme splnit

- Polní rovnice — to je zde snadné, protože používáme superpozici známých řešení polních rovnic elektrostatiky. Jednak jde o pole disků dle zadání a pak také o homogenní elektrické pole se zadanou intenzitou E_0. Tomu odpovídá elektrický potenciál $\Phi_0 = -E_z z$.
- Okrajové podmínky — Ty obvykle určují hodnoty potenciálu na vodičích. Země je takovým vodičem a tedy musíme vyžadovat, aby $\Phi_0(z = 0) = 0$ (to jsme již učinili) a také použijeme zrcadlové obrazy zdrojů v $z = -z_1$ a $z = -z_2$. (V našem přibližném modelu by dokonce stačilo místo obrazů disků umístit tam např. v $z = (z_1 + z_2)/2$ jediný bodový náboj a jeho hodnotu určit z podmínky $\Phi(z = 0) = 0$.)

b) V úloze nahrazujeme neznámé rozložení náboje na povrchu válce dvěma náboji ve tvaru disku s nábojovou hustotou jako by měl osamocený vodivý disk. Potřebuje dvě rovnice určující náboje těchto dvou disků. Nedokážeme zařídit aby byl potenciál všude na povrchu válce nulový (to by bylo nekonečně rovnic pro nekonečně bodů povrchu válce). Místo toho pro jednoduchost zvolíme střed horní a dolní podstavy válců a vyžadujeme potencál odpovídající uzmemneění válce

$$\Phi(x = y = 0, z = z_1) = 0, \quad \Phi(x = y = 0, z = z_2) = 0. \tag{3}$$

Připomeňme si, že potenciál uvažovaného jednoho vodivého disku byl

$$\Phi_{\text{disk}} = \frac{Q_{\text{disk}}}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{a}\right),$$

kde s, v byly sferoidální souřadnice zavedené mj. vztahem $z = s \cos v$. Z výše uvedeného vidíme, že (zatím) vystačíme s polem na ose z kde se vztah pro s zjednoduší na

$$s = |z|.$$

Po uvážení dvou disků o stejném poloměru a, jejich zrcadlových obrazů a homogenního atmosférického pole dostaneme

$$\Phi(x = y = 0, z) = -E_0 z - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\arctan\frac{|z - z_1|}{a} - \arctan\frac{|z + z_1|}{a}\right) - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\arctan\frac{|z - z_2|}{a} - \arctan\frac{|z + z_2|}{a}\right) \quad (4)$$

Dosazením tohoto tvaru Φ do rovnice (3) dostaneme dvě rovnice pro neznámé náboje Q_1, Q_2.

$$Q_1\left(\arctan\frac{2z_1}{a}\right) + Q_2\left(\arctan\frac{|z_1 + z_2|}{a} - \arctan\frac{|z_1 - z_2|}{a}\right) = 4\pi\epsilon_0 E_0\, a z_1,$$
$$Q_1\left(\arctan\frac{|z_2 + z_1|}{a} - \arctan\frac{|z_2 - z_1|}{a}\right) + Q_2\left(\arctan\frac{2z_2}{a}\right) = 4\pi\epsilon_0 E_0\, a z_2$$

c) Numerické řešení této soustavy rovnic dá

$$Q_1 \doteq 1.23\text{nC}, \quad Q_2 \doteq 2.43\text{nC}.$$

d) Nejprve si rozmyslíme, jaká zjednodušení můžeme použít s cílem vyhnout se výpočtu integrálů pro tok elektrického pole plochou.

První aproximace spočívá v součinu plochy a (normálové složky) elektrické intezity ve středu disku. Elektrická intenzita na ose spočtená z (4) je

$$E_z(x = y = 0, z) = E_0 + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\text{sgn}(z - z_2)}{|z - z_1|^2 + a^2} - \frac{1}{|z + z_1|^2 + a^2}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\text{sgn}(z - z_2)}{|z - z_2|^2 + a^2} - \frac{1}{|z + z_2|^2 + a^2}\right). \quad (5)$$

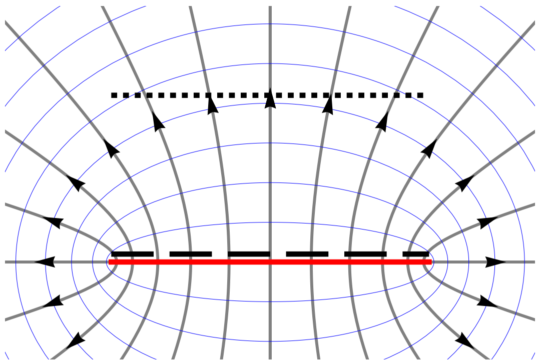
Použili jsme $|x|' = \text{sgn}\, x$ a také to, že $\text{sgn}(z + z_{1,2}) = 1$ protože nad zemí je vždy $z > 0$.

Než do této rovnice dosadíme $z = z_1 - \epsilon$ a $z = z_2 + \epsilon$ a vynásobíme ji ϵ_0 a $\mp\pi a^2$ ($\mp$ kvůli orientaci podstav) abychom získali odhad náboje na podstavách (a jejich podělením pak hledaný poměr), všimneme si, že jeden člen ještě potřebuje upřesnit.

Uvažujme na chvíli pole samotného disku disku č.1. V této aproximaci nám totiž vychází tok elektrického pole disku č.1 počítaný přes jeho (spodní) plochu jako limitu pro $z \to z_1^-$

$$\epsilon_0 \int_{\text{disk}(z_1^-)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \doteq -\epsilon_0 \pi a^2 \times \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-1}{0^2 + a^2} = \frac{Q_1}{4}.$$

Protože siločáry směřují z disku symetricky na obě strany, měli bychom přesně dostat $Q_1/2$. Proto zlomky, kde se ve jmenovateli vyskytuje $0^2 + a^2$ vynásobíme opravným faktorem 2 a tak získáme snesitelně přibližný výraz pro náboje na podstavách



Siločáry elektrického pole nabitého vodivého disku a jejich tok skrze stejně velký disk nacházející se velmi blízko (čárkovaná čára) a dále (tečkovaně) od něj. Zatímco u blízkého disku dá součin plochy a intezity uprostřed integrované plochy jen polovinu správného výsledku, pro vzdálenost rovnou poloměru disku je to již 86% a pro trojnásobek pak 94%.

$$Q_1' = -\epsilon_0 \pi a^2 E_0 - \frac{Q_1}{4}\left(-2 - \frac{1}{4z_1^2/a^2 + 1}\right) - \frac{Q_2}{4}\left(\frac{-1}{(z_1 - z_2)^2/a^2 + 1} - \frac{1}{(z_1 + z_2)^2/a^2 + 1}\right),$$
$$Q_2' = \epsilon_0 \pi a^2 E_0 + \frac{Q_1}{4}\left(\frac{1}{(z_1 - z_2)^2/a^2 + 1} - \frac{1}{(z_1 + z_2)^2/a^2 + 1}\right) + \frac{Q_2}{4}\left(2 - \frac{1}{4z_2^2/a^2 + 1}\right).$$

Číselná hodnota nábojů na podstavách válce $Q_1' = 0.68$ nC, $Q_2' = 1.6$ nC pak dává poměr

$$\frac{Q_1'}{Q_2'} \doteq 0.43\ .$$

Úloha 3

Uvažujte kouli o poloměru a, v níž je celkový náboj Q sféricky symetricky rozmístěn tak, že potenciál elektrostatického pole má tvar (samozřejmě, $r = |\vec{r}|$)

$$\Phi(r) = \begin{cases} Ar^5 + B + \dfrac{C}{r} & 0 < r < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{D}{r^4} + E & \dfrac{a}{2} < r < a \end{cases} .$$

Dále platí, že nikde uvnitř koule nejsou žádné plošné ani bodové náboje. Žádné náboje se pak nenacházejí vně koule. Elektrický náboj má tedy podobu objemové nábojové hustoty nenulové jen uvnitř koule.

a) Nalezněte hodnotu konstant A, B, C, D pokud znáte celkový náboj Q.

Předpokládejme nyní, že koule je mírně vodivá a veškerý náboj se časem přestěhuje na její povrch.

b) Nalezněte potenciál uvnitř koule, který bude odpovídat situaci, kdy všechen náboj skončí na jejím povrchu v podobě konstatní plošné nábojové hustoty.

c) Nalezněte rozdíl energií obou konfigurací pole, tedy energii, která se při stěhování náboje přemení v teplo.

Může se hodit

$$\iiint\limits_{r<\frac{a}{2}} r^n \; d^3x = \frac{4\pi}{n+3}\left(\frac{a}{2}\right)^{n+3}, \qquad \iiint\limits_{\frac{a}{2}<r<a} r^n \; d^3x = \frac{4\pi}{n+3}\left[a^{n+3} - \left(\frac{a}{2}\right)^{n+3}\right].$$

Řešení

a) Z Gaussovy věty vyplývá, že celkový náboj uvnitř koule je dán ve sférické symetrii jako

$$Q = 4\pi r^2 \epsilon_0 E_r(r = a).$$

Protože $E_r(r = a) = -\left.\partial_r \Phi\right|_{r=a} = \frac{4D}{a^5}$ vychází

$$D = \frac{a^3 Q}{16\pi\epsilon_0}.$$

V zadání není požadováno určení konstanty E. To proto, že si můžeme potenciál v jednom bodě zvolit. Obvykle se bere $\Phi(r = \infty) = 0$, my ale pro jednoduchost zvolíme $E = 0$ a dáme pak při výpočtu pozor, abychom nikde nepředpokládali, že potenciál vymizí v nekonečnu.

Z podmínky, že uvnitř koule nejsou bodové náboje dostáváme

$$C = 0$$

Protože uvnitř koule nejsou ani plošné náboje, víme, že derivace potenciálu jsou spojité v $r = \frac{a}{2}$. Z toho spočteme

$$A = -\frac{128Q}{5\pi a^6 \epsilon_0}.$$

Potenciál musí být v $r = \frac{a}{2}$ spojitý a z této podmínky dostameme

$$B = \frac{9Q}{5\pi a \epsilon_0} \qquad \text{(platí jen pro volbu } E = 0).$$

b) Důsledek sférické symetrie (a Gaussovy věty) je, že při stěhování se nemění elektrické pole vně koule a tedy ani potenciál. Stačí tedy vyčíslit $\Phi(r = a)$ a tato hodnota potenciálu, která byla původně jen na povrchu sféry $r = a$ je nyní všude uvnitř, tedy

$$\Phi(r \leq a) = \frac{1}{16}\frac{Q}{\pi\epsilon_0 a}.$$

c) Protože vně koule se elektrické pole nemění a tedy ani jeho energie, vystačíme s integrací uvnitř koule. Vně koule je totiž v obou případech stejné pole a jeho energii

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}$$

nemusíme uvažovat. Energii elektrického pole výchozího rozložení náboje budeme uvnitř koule počítat podle vztahu

$$W_1 = \frac{\epsilon_0}{2}\iiint\limits_{0<r<a} |E_r|^2 d^3x.$$

Oproti vztahu $\frac{1}{2}\int \rho\, \Phi \, d^3x$ je to výhodnější, protože integrand pak vyjde ve tvaru dle nápovědy a stačí sečíst příslušné zlomky. Energie elektrického pole koncového rozložení náboje uvnitř koule počítaná podle téhož vzathu je nulová $W_2 = 0$, protože je uvnitř koule konstatntní poteciál. Proto

$$\Delta W = W_1 = \frac{2293}{616}\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 a}.$$