Příklad pro zkoušku z předmětu MAPLE PRO FYZIKY

Spočtěte kapacitu deskového kondenzátoru s vzájemně rovnoběžnými čtvercovými deskami o straně $a = 1$ a nezanedbatelnou vzdáleností desek $d = 1$ v jednotkách, v nichž $\epsilon_0 = 1$.

Rozložte neznámou funkci $\sigma(x, y)$ popisující nábojovou hustotu na jednom z čtverečků do báze funkcí respektujících symetrie úlohy ($x \leftrightarrow y, x \leftrightarrow -x$), např $[1,\ x^2 + y^2,\ x^4 + y^4,\ x^2y^2]$.

$$\sigma(x, y) = \sum_k a_k \sigma_k(x, y)$$

Na druhém čtverečku předpokládáme kvůli symetrii nábojovou hustotu $-\sigma(x, y)$. Bázi nábojových hustot můžete generovat např. kódem

```
Nr:=2;        #  2*Nr je nejvyssi zahrnuty rad
Bf:=convert( {seq(
    seq(x^(2*i)*y^(2*j-2*i)+y^(2*i)*x^(2*j-2*i),
             i=0..j), j=0..Nr)},list);
Nk:=nops(Bf); # Pocet bazovych funkci az do radu Nr
```

Protože je problém lineární, můžeme jej chápat tak, že každá z bázových funkcí vytváří nějaký potenciál a my pak vezmeme takovou lineání kombinaci těchto potenciálů.

$$\Phi(x, y, z) = \sum_k a_k \phi_k(x, y, z)$$

Aby tento součet, tedy výsledný potenciál $\Phi(x, y, z)$, byl na povrchu jednoho čtverečku ($z = d/2$) konstantní a roven $+U/2$, zatímco na povrchu druhého čtverečku ($z = -d/2$) měl hodnotu $-U/2$. Protože volíme opačné nábojové hustoty, máme zaručen na druhém čtverečku i opačný potenciál (v nekonečnu samozřejmě nulový). Proto stačí splnit rovnici $\Phi(x \in < -1/2, 1/2 >, y \in < -1/2, 1/2 >, z = d/2) = U/2$

Protože bodů čtverce, kde musí být tato rovnice splněna je nekonečně mnoho, vybereme konečnou representativní podmnožinu, např. ekvidistantí síť bodů v trojúhelníku ([0,0], [1/2,0], [1/2,1/2]), viz následující kód:

```
N:=4;           # Pocet rad bodu
Body:=[seq( seq( [i/2/N,j/2/N],j=0..i),i=0..N)];
Nb:=nops(Body); # Pocet bodu v N radach
```

Budeme uvažovat případ, kdy počet bodů v nichž chceme slpnit rovnice je větší než počet neznámých, tedy koeficientů v rozvoji nábojové hustoty do bázových funcí. Takový problém lze například řešit metodou nejmenších čtverců. V podstatě se snažíme vyřešit úlohu $Ax = b$, kde nečtvercová matice A je potenciál od k-té bázové funkce v l-témn bodě:

$$\phi_k(x_l, y_l, z = d/2) = \frac{1}{4\pi} \int d\bar{x} d\bar{y}\ \sigma_k(x, y) \left[\frac{1}{\sqrt{(x_l - \bar{x})^2 + (y_l - \bar{y})^2 + \epsilon^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_l - \bar{x})^2 + (y_l - \bar{y})^2 + d^2}} \right]$$

S pomocí `linalg[leastsqrs]` nalezněte hledané koeficinety a poté nakreslete (plot3d) rozložení náboje na elektrodě.

Při numerické integraci je lepší počítat hodnotu potenciálu kousíček nad povrchem elektrody, odsud to ϵ pod odmocninou.

Zatímco první integraci lze zvládnout analyticky, druhou budete muste počítat numericky. Zde se vyplatí mít, řekněme, `Digits=13`, ale počítat integrály jen na 7 míst pomocí konstrukce `evalf(int(...,x=-1/2..1/2,7))`, která používá zvláštní, třetí parametr funkce `int`.